Atommagok elektromágneses tulajdonságai és bomlásai

Atommagok: szondák kondenzált anyagokban

Kölcsönhatás: elektromágneses

ME, PAC, PAD, NO, NMR, NQR, ...

Mágneses dipólusnyomaték

Klasszikusan: $\underline{\mu} = \gamma\, \underline{I}$

↑ giromágneses viszony

Kvantummechanikában:

$|I, M\rangle$ állapot

$\mu := \langle I, I | \hat{\mu}_z | I, I\rangle$

$$\hat{\mu}_z = \gamma\, \hat{I}_z$$

$$\langle I, I | \hat{I}_z | I, I \rangle = I\hbar$$

$$\boxed{\mu = \gamma \hbar I}$$

$$\gamma = g\, \frac{\mu_N}{\hbar}$$

$$\mu_N = \frac{e\hbar}{2m_p} = 5.5 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{A\,m^2}$$

(egy m_p tömegű és $\hbar$ pálya-impulzusnyomatékú e ponttöltés klasszikus mágneses dipólusnyomatéka)

$$\left.\begin{array}{ll} \mu: & \mu_N \text{ egységben} \\ I: & \hbar \quad \text{--}\shortparallel\text{--} \end{array}\right\} \Longrightarrow g = \gamma$$

$g_L(p) = 1$ $\qquad$ $g_L(n) = 0$

Dirac-elmélet:

$g_s(p) = 2$ $\qquad$ $g_s(n) = 0$

Kísérleti adatok:

$g_s(p) = 5.59$ $\qquad$ $g_s(n) = -3.83$

Mag: ha az impulzusnyomaték és a mágneses nyomaték egyetlen („világító") nukleontól származnak (ps.-ptl. és ptl.-ps. magok), akkor

$$\hat{\underline{\mu}} = \underbrace{g_L \hat{\underline{L}}}_{\hat{\mu}_L} + \underbrace{g_s \hat{\underline{S}}}_{\hat{\mu}_s} \qquad \hat{\underline{I}} = \hat{\underline{L}} + \hat{\underline{S}} \qquad (S = 1/2)$$

Általánosított Landé-formula:

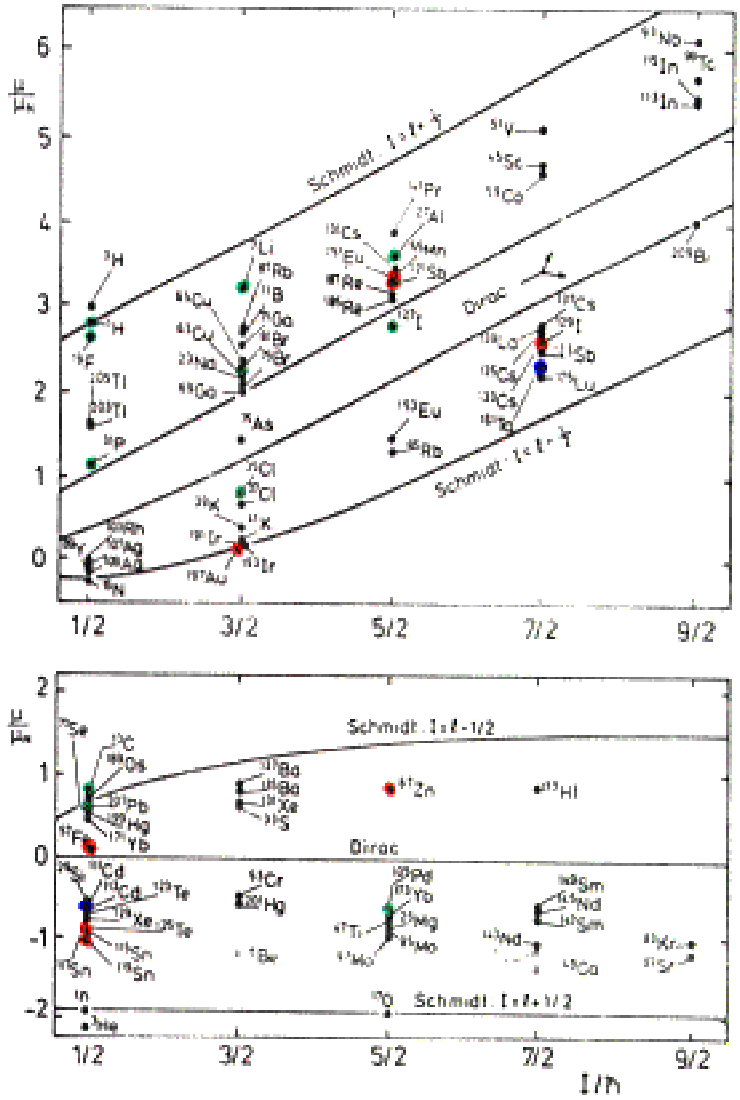
$$g = \frac{1}{2I(I+1)} \Big\{ \left[I(I+1) + L(L+1) - S(S+1) \right] g_L + \left[I(I+1) + S(S+1) - L(L+1) \right] g_s \Big\}$$

$S = 1/2$ $\qquad$ $I = L \pm 1/2$

g-faktor egyrészecske-modellben (Schmidt-görbék):

$$\boxed{g = g_L \pm \frac{g_s - g_L}{2L+1}} \qquad (I = L \pm 1/2)$$

ME
NMR
PAC



<u>Abb. 2.2:</u> Experimentelle Werte der magnetischen Momente stabiler Kerne mit ungeradem Proton (oben) und ungeradem Neutron (unten) im Grundzustand. Die durchgezogene Linie gibt die Schmidt-Werte an, gestrichelt sind die sogenannten Dirac-Linien eingezeichnet, die man erhält, wenn man für g_s die Dirac-Werte einsetzt (nach [MAY 84], Werte von [LED 78])

	I	$\mu_{Schmidt}$	μ_{Dirac}
Páratlan protonszámú magokra:	$L+\frac{1}{2}$	$I+2.3$	$I+\frac{1}{2}$
	$L-\frac{1}{2}$	$I-2.3\frac{I}{I+1}$	$I-\frac{1}{2}\frac{I}{I+1}$
Páros protonszámú magokra:	$L+\frac{1}{2}$	-1.92	0
	$L-\frac{1}{2}$	$1.92\frac{I}{I+1}$	0

A kísérleti értékek csaknem mind a Schmidt- és a Dirac-görbék között vannak.

Elektromos kvadrupólusnyomaték

Klasszikusan: Tenzor: $Q_{\alpha\beta}=\frac{1}{e}\int(3x_\alpha x_\beta-r^2\delta_{\alpha\beta})\varrho(r)\,d^3r$

$$\underset{Q_{zz}}{Q}=\frac{1}{e}\int(3z^2-r^2)\,\varrho(r)\,d^3r=\frac{1}{e}\sqrt{\frac{16\pi}{5}}\int r^2\,Y_2^0(\theta,\phi)\,\varrho(r)\,d^3r$$

Ha $\varrho(r)$ gömbszimmetrikus, akkor $3z^2\Rightarrow x^2+y^2+z^2=r^2$

$$\Downarrow$$

$$Q=0$$

Ha $\varrho(r)$ nem gömbszimmetrikus, akkor egy homogén töltéseloszlású forgási ellipszoiddal közelíthetjük:

$$\boxed{Q=\frac{2}{5}Z(b^2-a^2)=\frac{4}{5}ZR^2\varepsilon}$$

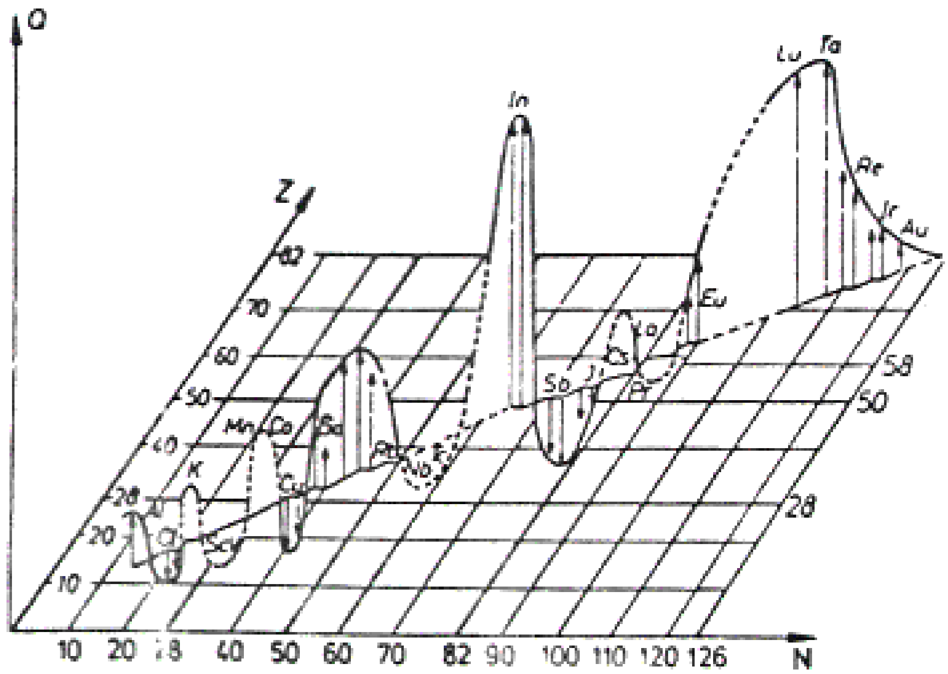
$Q<0$ diszkosz (oblate)

$Q>0$ szivar (prolate)

$$R=\frac{a+b}{2}\qquad \varepsilon=\frac{b-a}{2}$$

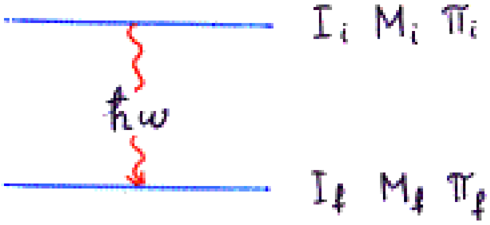
$|\varepsilon|\approx 0.1$

Kivétel: hasadási izomérek ($\varepsilon\approx 1$)



<u>Abb. 2.3:</u> Beobachtete Werte des Quadrupolmoments Q als Funktion der Kernladungszahl Z und der Neutronenzahl N. (Alle Werte bis zum In sind mit dem Faktor 10 multipliziert. Aus (KOP 56))

Atommagok elektromágneses bomlása



$$E_i = E_f + \hbar\omega$$

$$\underline{I}_i = \underline{I}_f + \underline{\ell}$$

$$\pi_i = \pi_f \cdot \pi$$

Keressük a Maxwell-egyenletek adott impulzusnyomatékhoz és adott paritáshoz tartozó megoldásait (multipól-sugárzás).

Forrásmentes térben:

$$\underline{\nabla} \times \underline{E} = -\frac{\partial \underline{B}}{\partial t} \qquad \underline{\nabla} \times \underline{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \underline{E}}{\partial t}$$

$$\underline{\nabla}\,\underline{E} = 0 \qquad \underline{\nabla}\,\underline{B} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\left.\begin{aligned} \underline{B}_\ell^m(\underline{r},t) &= f_\ell(kr)\,\underline{L}\,Y_\ell^m(\theta,\phi)\,e^{i\omega t} \\ \underline{E}_\ell^m(\underline{r},t) &= i\,\frac{c}{k}\,\underline{\nabla}\times\underline{B}_\ell^m(\underline{r},t) \end{aligned}\right\}$$

$\pi = (-1)^\ell$
(E) elektromos
2^ℓ-pólus-sugárzás

$$\left.\begin{aligned} \underline{E}_\ell^m(\underline{r},t) &= f_\ell(kr)\,\underline{L}\,Y_\ell^m(\theta,\phi)\,e^{i\omega t} \\ \underline{B}_\ell^m(\underline{r},t) &= -i\,\frac{1}{kc}\,\underline{\nabla}\times\underline{E}_\ell^m(\underline{r},t) \end{aligned}\right\}$$

$\pi = (-1)^{\ell+1}$
(M) mágneses
2^ℓ-pólus-sugárzás

Impulzusnyomaték: $\sqrt{\ell(\ell+1)}\,\hbar$
z-komponens: $m\hbar$

$\omega = kc$
$\underline{L} = i(\underline{r}\times\underline{\nabla})$
$f_\ell(kr)$: szférikus Bessel-függvény

Vektor-gömbfüggvények:

$$\underline{X}_\ell^m(\theta,\phi) = \frac{1}{\sqrt{\ell(\ell+1)}}\,\underline{L}\,Y_\ell^m(\theta,\phi)$$

Kiválasztási szabály az impulzusnyomatékokra (háromszög-egyenlőtlenség):

$$\ell = I_i + I_f,\; I_i + I_f - 1,\; \dots,\; |I_i - I_f|$$

Tab. 2.1: Multipolordnungen bei γ-Übergängen

Drehimpulsänderung ΔI		0 kein 0 → 0	1	2	3
Paritätswechsel	ja	E1 (M2)	E1 (M2)	M2 E3	E3 (M4)
	nein	M1 E2	M1 E2	E2 (M3)	M3 E4

Szögeloszlás

Energia-áramsűrűség (Poynting-vektor):

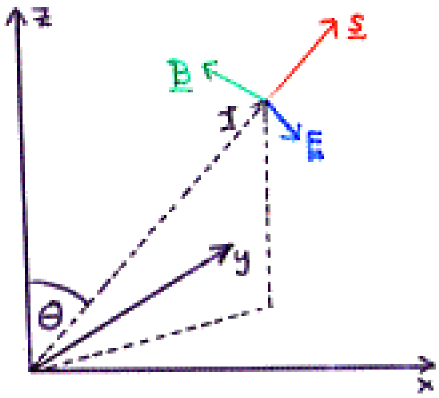
$$\underline{S} = \frac{1}{\mu_0}(\underline{E} \times \underline{B})$$

A hullámzónában:

$$\varepsilon_0 |\underline{E}|^2 = \frac{1}{\mu_0} |\underline{B}|^2$$

$$\Downarrow$$

$$|\underline{E}| = c\,|\underline{B}|$$



$$|\underline{S}| = c\,\varepsilon_0 |\underline{E}|^2 = \frac{c}{\mu_0} |\underline{B}|^2$$

Mℓ-sugárzásra: $|\underline{S}| = c\,\varepsilon_0 |\underline{E}|^2 \sim |\underline{L}\, Y_\ell^m(\theta,\phi)|^2$

Eℓ-sugárzásra: $|\underline{S}| = \frac{c}{\mu_0} |\underline{B}|^2 \sim |\underline{L}\, Y_\ell^m(\theta,\phi)|^2$

Normált szögeloszlás:

$$F_{\ell m}(\theta) = \frac{|\underline{L}\, Y_\ell^m(\theta,\phi)|^2}{\sum_m |\underline{L}\, Y_\ell^m(\theta,\phi)|^2}$$

Tulajdonságok:

a) $\sum_m F_{\ell m}(\theta) = 1$ — izotrópia az m-összegre

b) $F_{\ell m}(\theta) = F_{\ell\,-m}(\theta)$ — szimmetria m-ben

c) $F_{\ell m}(\theta) = F_{\ell m}(\pi-\theta)$ — tükörszimmetria az x-y síkra

d) $F_{\ell m}(0) = 0$, ha $m \neq \pm 1$

Tab. 2.2: Winkelverteilungsfunktionen $F_{\ell m}(\theta)$ für Dipol- und Quadrupolstrahlung

	$m = 0$	$m = \pm 1$	$m = \pm 2$
$\ell = 1$ (Dipol)	$\frac{1}{2}\sin^2\theta$	$\frac{1}{4}(1+\cos^2\theta)$	---
$\ell = 2$ (Quadrupol)	$\frac{3}{2}\sin^2\theta\cos^2\theta$	$\frac{1}{4}(1-3\cos^2\theta+4\cos^4\theta)$	$\frac{1}{4}(1-\cos^4\theta)$

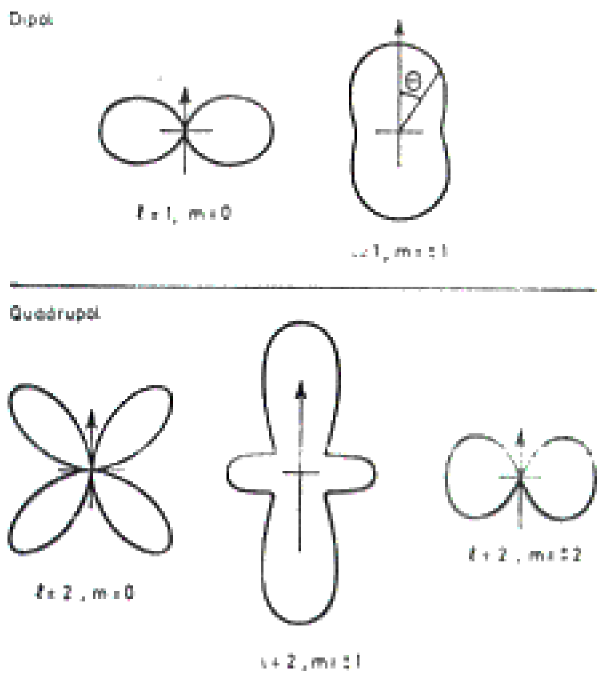


Abb. 2.6: Ausstrahlcharakteristik für reine Dipol- und Quadrupolstrahlung

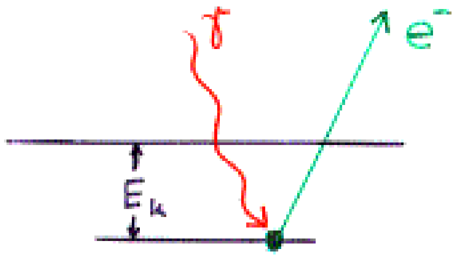
A γ-sugárzás kimutatása

Sugárzás és anyag kölcsönhatása

- fotoeffektus
- Compton-effektus

(- párkeltés)

Fotoeffektus



$$E_e = E_\gamma - E_k$$

$$E_{det} = E_e + E_k = E_\gamma$$

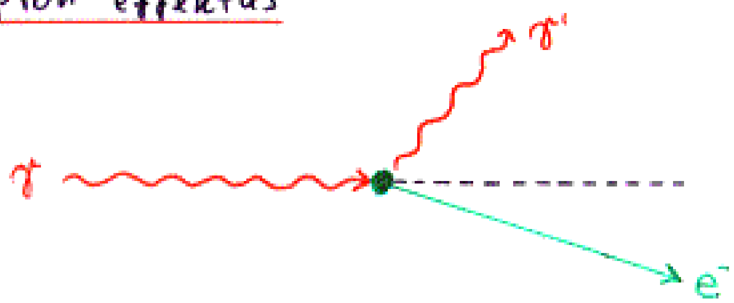
kisenergiájú röntgen-
fotonok és Auger-elektronok

Hatáskeresztmetszet:

$$\boxed{\sigma_{foto} \sim E^{-7/2} Z^5}$$

Alacsony energián (fény, UV, lágy röntgen, lágy γ) és magas rendszámnál (pl. I, Pb) jelentős.

Compton-effektus



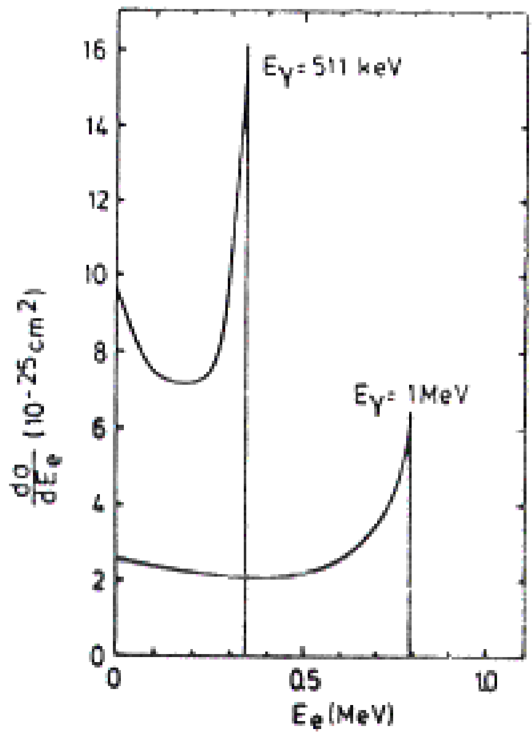


Abb. 2.8:
Energieverteilung der Compton-Elektronen für zwei verschiedene γ-Energien

$$\boxed{E_e = E_\gamma \left[1 - \frac{1}{1 + \frac{E_\gamma}{m_e c^2}(1 - \cos\theta)} \right]}$$

A meglökött elektron

minimális energiája: $E_e^{min} = 0$ $(\theta = 0)$

maximális energiája:

$$\boxed{E_e^{max} = E_\gamma \frac{1}{1 + \frac{m_e c^2}{2 E_\gamma}}}$$

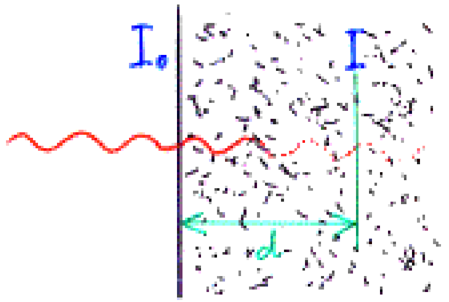
A Compton-elektronok energiaeloszlása

Hatáskeresztmetszet:

$$\boxed{\sigma_c \sim E_\gamma^{-1} Z}$$

Közepes (100 keV ... 1 MeV) energián és alacsony rendszámnál jelentős.

Abszorpciós együttható



$$\boxed{I = I_0 e^{-\mu/d}}$$

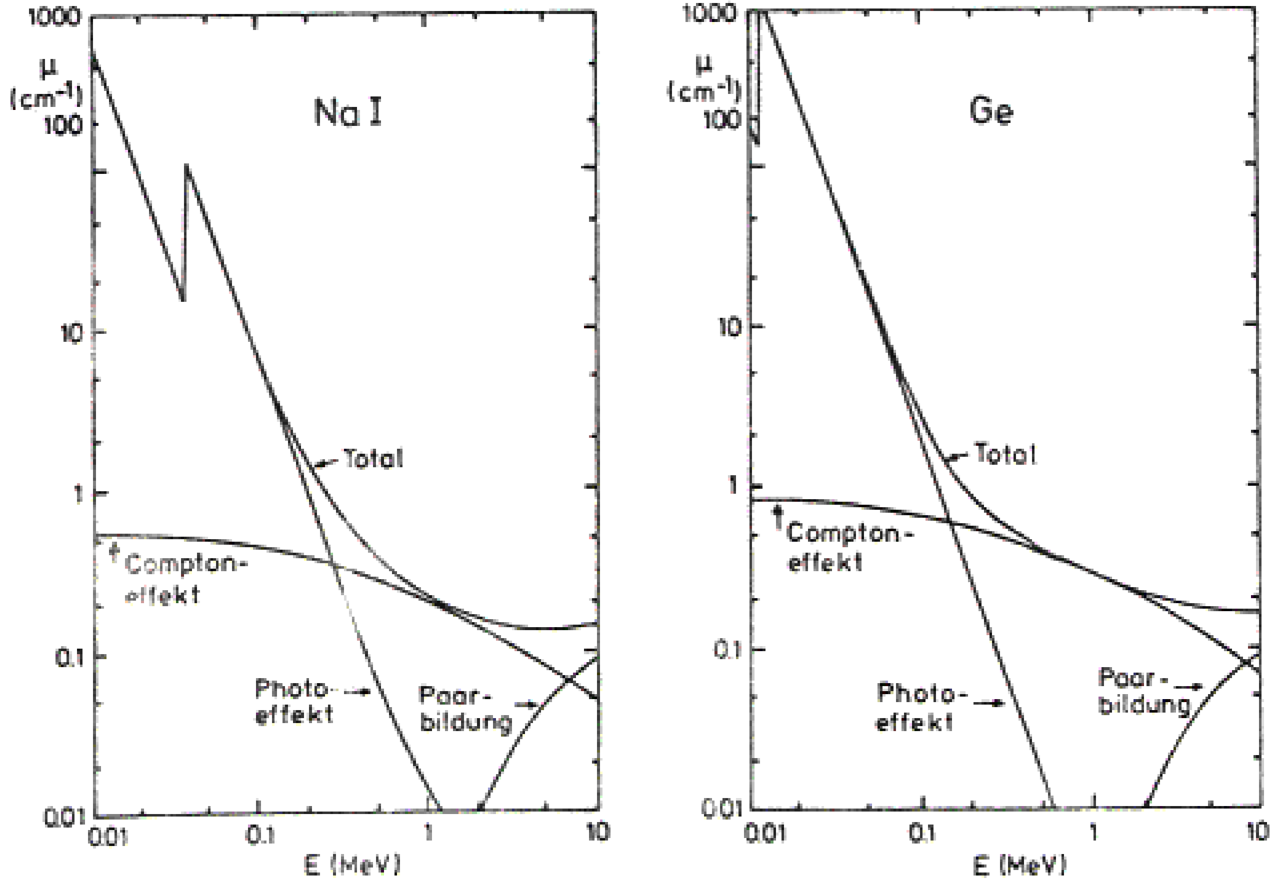


Abb. 2.9: Absorptionskoeffizienten für NaI und Ge

Szintillatoren:

NaI(Tl) : mittlere Energieauflösung ($\sim 2 \ldots 20\%$); schlechte Zeitauflösung ($> 2ns$)

Plastik: Fast keine Energieauflösung; gute Zeitauflösung ($\approx 200\,ps$)

Anzahl der radiolysierten Atome $\sim E_\gamma$

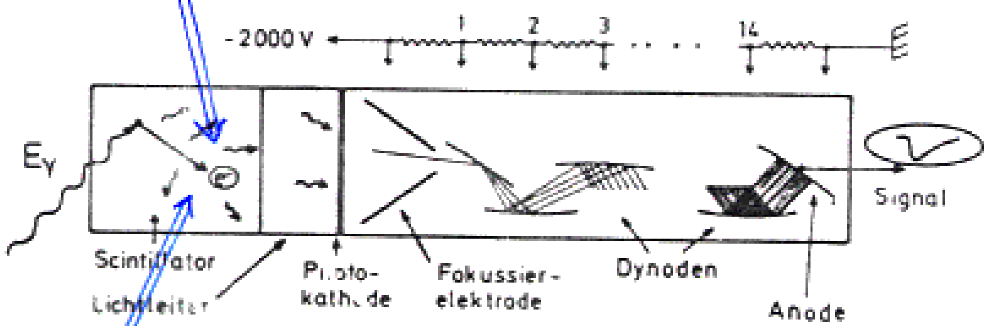


Abb. 2.10: Schematischer Aufbau eines Szintillationsdetektors

A radiolitált (ionizált vagy gerjesztett) atomok száma $\sim E_\gamma$

Szcintillátorok:

NaI(Tl): közepes ($\sim 2 \ldots 20\%$) energiafelbontás, gyenge ($> 2ns$) időfelbontás

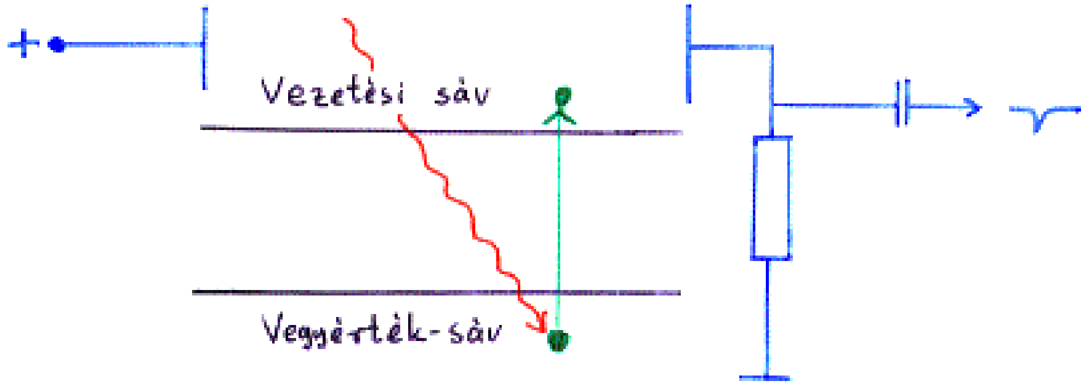
⋮

BaF_2

⋮

Plasztik: Energiafelbontás alig van, jó ($\approx 200\,ps$) időfelbontás

Intrinsic Ge-detektor (i-Ge-detektor)



Nagyon tiszta Ge-kristályból készül (szennyezőkoncentráció $\lesssim 10^{-10}$). Csak kis méretben állítható elő.

Ge(Li)-detektor (p-i-n-dióda)

Általában hengeres elrendezésű p-i-n-dióda, nagy intrinsic tartománnyal. Nagy térfogat ($\lesssim 100\,cm^3$).

A Ge-detektorok energiafelbontása igen jó ($\sim 2\ldots3$‰); időfelbontásuk gyenge ($\sim 5\,ns$).

Lavina-fotodióda (APD)

Záróirányban előfeszített p-n-dióda. A kiürített rétegben a sugárzás hatására lavina jön létre (hasonlóan a Zener-diódához). Energiafelbontása gyakorlatilag nincs. Időfelbontása igen jó ($\lesssim 500\,ps$).

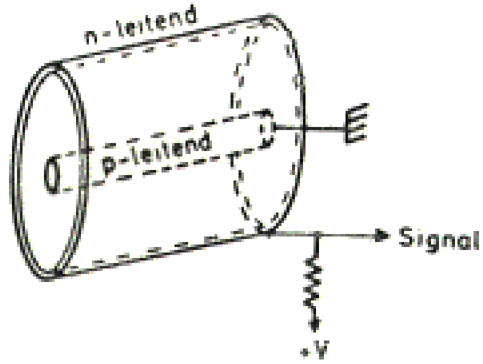


Abb. 2.12:
Aufbau eines Ge(Li)-Detektors

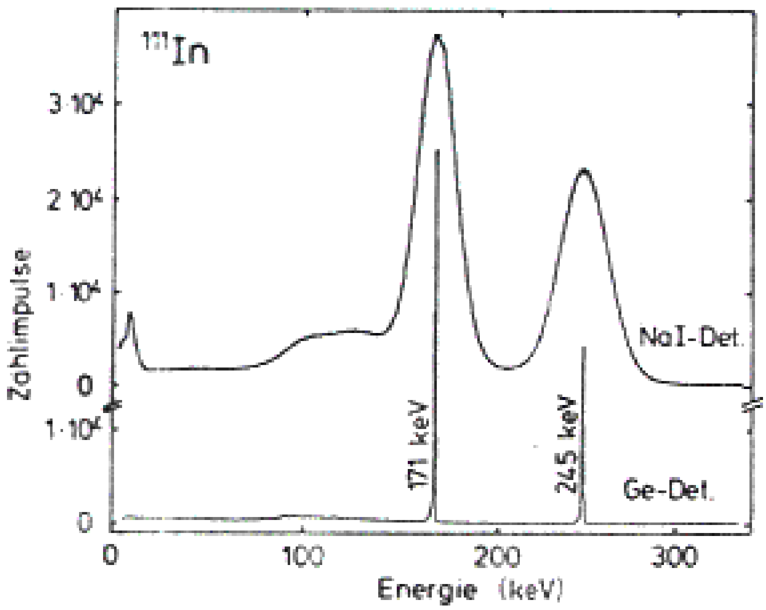
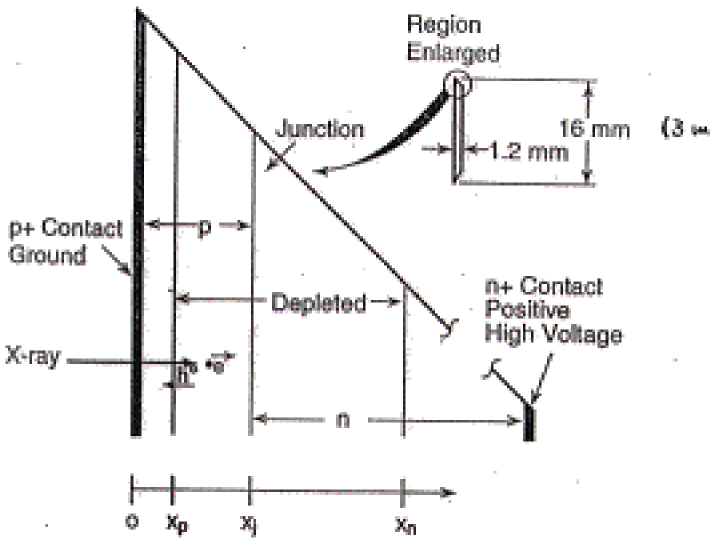
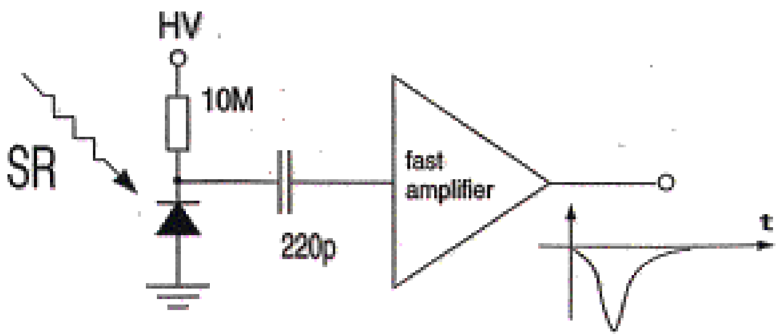


Abb. 2.11: Energiespektrum einer ^{111}In Quelle aufgenommen mit einem NaI(Tl)- (oben) und einem i-Ge-Detektor (unten)

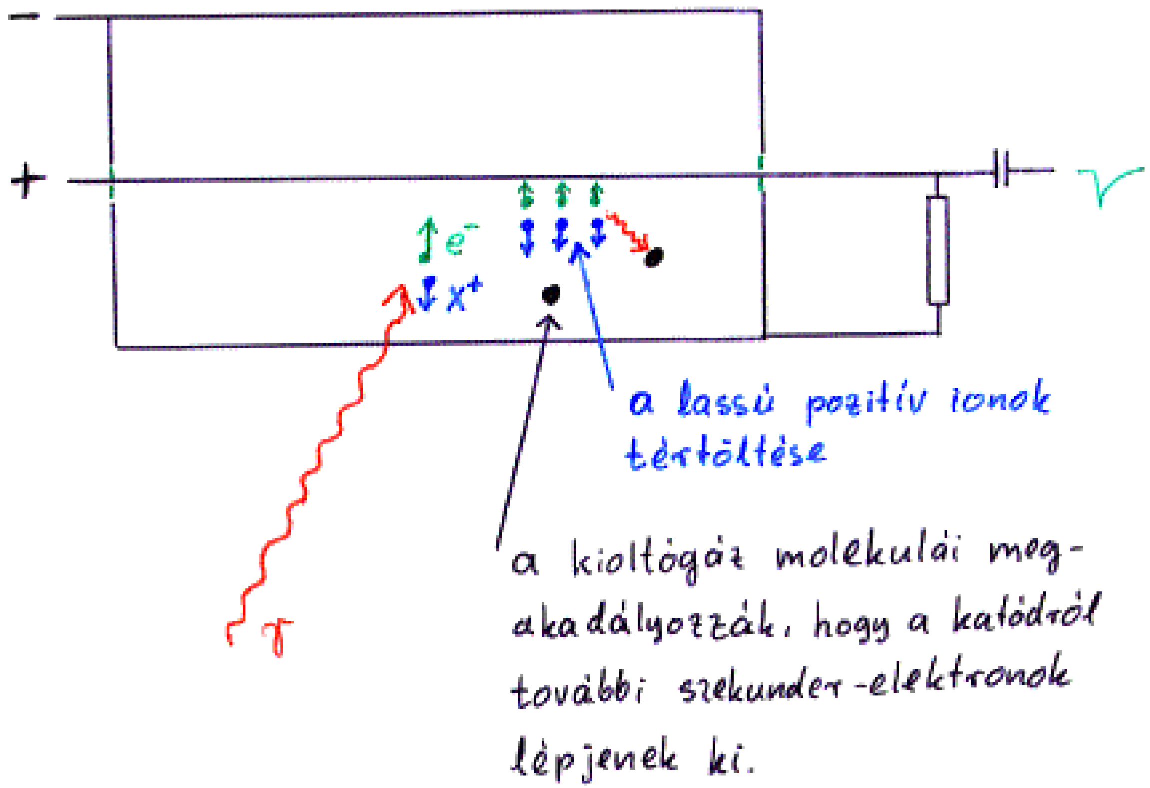
APD: Avelanche Photo Diode



APD operational setup:



Proporcionális számláló



Gázerősítés: $10^2 \ldots 10^4$

Csak alacsony energiájú gamma-sugárzás (~10 keV) detektálására alkalmas. Kivétel: abszorpciós él (pl. Kr a 14.4 keV-os fotonokra). Ilyenkor viszont kiszökési csúcs is megjelenik.

Energiafelbontása jó (~10%), időfelbontása nagyon rossz (~1 μs).

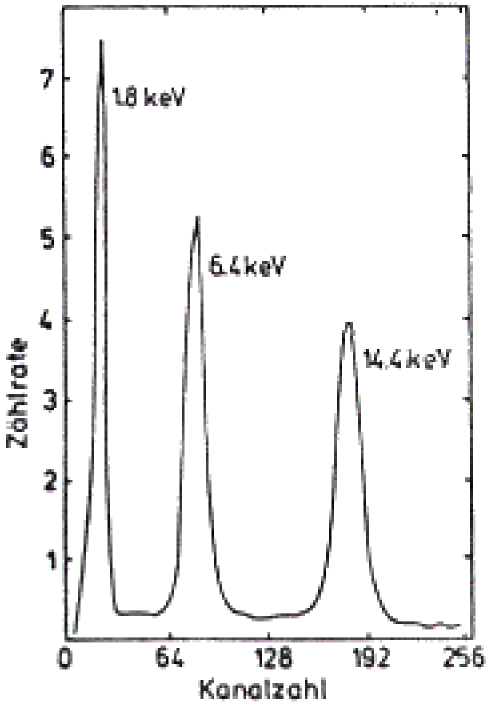


Abb. 4.14:
Impulshöhenspektrum einer ^{57}Co Mößbauer-Quelle aufgenommen mit einem Proportionalzählrohr, dessen Zählgas aus 97 % Krypton und 3 % CO_2 besteht

Impulzusnyomatékok csatolása, szférikus tenzorok

$$\underline{j}_3 = \underline{j}_1 + \underline{j}_2$$

$$|j_3, m_3\rangle = \sum_{\substack{m_1, m_2 \\ m_3 = m_1 + m_2}} (j_1, j_2, m_1, m_2 | j_3, m_3)\, |j_1, m_1\rangle |j_2, m_2\rangle$$

$C(j_1, j_2, j_3; m_1, m_2, m_3) \cdot (-1)^{j_1 + m_1}$

Clebsch-Gordan-együtthatók

j_1, j_2, j_3 : háromszög-egyenlőtlenség

Wigner-féle 3j-szimbólumok:

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} := (-1)^{j_1 - j_2 - m_3} \frac{1}{\sqrt{2j_3+1}} (j_1, j_2, m_1, m_2 | j_3, -m_3)$$

A 3j-szimbólumok szimmetria-tulajdonságai:

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_2 & j_3 & j_1 \\ m_2 & m_3 & m_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_3 & j_1 & j_2 \\ m_3 & m_1 & m_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} j_2 & j_1 & j_3 \\ m_2 & m_1 & m_3 \end{pmatrix} = (-1)^{j_1 + j_2 + j_3} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ -m_1 & -m_2 & -m_3 \end{pmatrix} = (-1)^{j_1 + j_2 + j_3} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}$$

Speciális esetek:

$$\begin{pmatrix} j & j & 0 \\ m & -m & 0 \end{pmatrix} = (-1)^{j-m} \frac{1}{\sqrt{2j_1+1}}$$

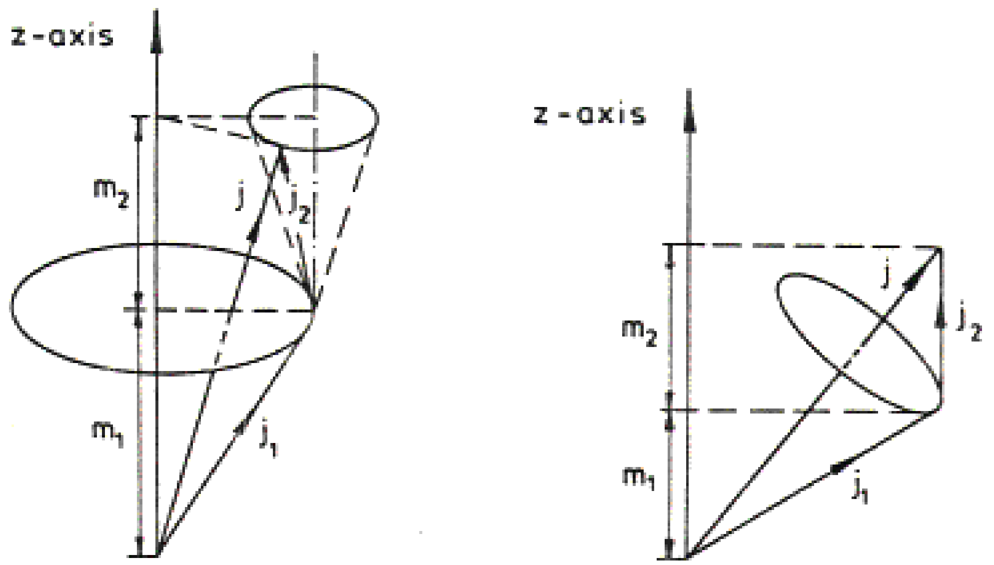


Fig. 1.5. Graphical representation of two angular momenta $\vec{j}_1$ and $\vec{j}_2$, shown as vectors that make a precession around the z-axis with constant angular velocity (vector model). Using the addition to a momentum $\vec{j} = \vec{j}_1 + \vec{j}_2$, the probability of obtaining a given value for the length j, given fixed m_1 and m_2 values, is given by the Clebsch-Gordan coefficient squared $|\langle j_1 m_1, j_2 m_2 | jm > |^2$. If the two vectors $\vec{j}_1$ and $\vec{j}_2$ are coupled to form the total angular momentum $\vec{j}$ (which is a constant of motion), the two vectors will make a precession around the direction of $\vec{j}$. For fixed value of the length of $\vec{j}$ and projection m, the projections m_1 and m_2 can be obtained again as a probability distribution given by the Clebsch-Gordan coefficient squared $| < j_1 m_1, j_2 m_2 | jm > |^2$

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0, \quad \text{ha } j_1 + j_2 + j_3 = \text{páratlan}$$

Ha $j_1 + j_2 + j_3 = 2p$ = páros, akkor

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (-1)^p \sqrt{\frac{(2p-2j_1)!(2p-2j_2)!(2p-2j_3)!}{(2p+1)!}} \times$$

$$\times \frac{p!}{(p-j_1)!(p-j_2)!(p-j_3)!}$$

Másodrendű tenzor felbontása

$$T_{ik} = \overset{\text{skalár}}{I_{ik}} + \underbrace{\overset{\text{antiszimmetrikus}}{A_{ik}} + \overset{\text{szimmetrikus}}{S_{ik}}}_{\text{nyom-mentes}}$$

$$I_{ik} = \frac{1}{3} Tr(T_{ik}) \delta_{ik} \qquad \text{skalár (1)}$$

$$A_{ik} = \frac{1}{2}(T_{ik} - T_{ki}) = -A_{ki} \qquad \text{vektor (3)}$$

$$S_{ik} = \frac{1}{2}(T_{ik} + T_{ki}) - \frac{1}{3} Tr(T_{ik})\delta_{ik} \qquad \text{tenzor (5)}$$

Az r vektor szférikus komponensei:

$$r_+ = -\frac{1}{\sqrt{2}}(x+iy) = -\frac{1}{\sqrt{2}} r \sin\theta \, e^{i\phi} = \sqrt{\frac{4\pi}{3}}\, r \, Y_1^1(\theta,\phi)$$

$$r_0 = z = r\cos\theta = \sqrt{\frac{4\pi}{3}}\, r \, Y_1^0(\theta,\phi)$$

$$r_- = \frac{1}{\sqrt{2}}(x-iy) = \frac{1}{\sqrt{2}} r \sin\theta \, e^{-i\phi} = \sqrt{\frac{4\pi}{3}}\, r \, Y_1^{-1}(\theta,\phi)$$

1. rendű szférikus tenzor

$\boxed{\text{T (l,m) l-ed rendű szférikus tenzor, ha T(l,m) elemei forgásoknál úgy transzformálódnak, mint az } Y_l^m(\theta,\phi) \text{ gömbfüggvények.}}$

$$T(l,m) = \sum_{\substack{m_1,m_2 \\ m_1+m_2=m}} (l_1,l_2,m_1,m_2|l,m)\, T_1(l_1,m_1)\, T_2(l_2,m_2)$$

Skalárszorzat:

$$T(0,0) = \sum_{m_1+m_2=0} (1,1,m_1,m_2|0,0)\, T_1(1,m_1)\, T_2(1,m_2)$$

Vektorszorzat:

$$T(1,m) = \sum_{m_1+m_2=m} (1,1,m_1,m_2|1,m)\, T_1(1,m_1)\, T_2(1,m_2)$$

Tenzorszorzat:

$$T(2,m) = \sum_{m_1+m_2=m} (1,1,m_1,m_2|2,m)\, T_1(1,m_1)\, T_2(1,m_2)$$

Wigner - Eckart - teoréma

$\hat{T}(l,m)$: l-ed rendű szférikus tenzoroperátor

$\hat{T}(l,m)$ mátrixelemei:

$$\boxed{\langle I',M'|\hat{T}(l,m)|I,M\rangle = \underbrace{(-1)^{I'-M'}\begin{pmatrix} I' & l & I \\ -M' & m & M \end{pmatrix}}_{C(I',l,I;-M',m,M)} \underbrace{\langle I'\|T(l)\|I\rangle}_{\Downarrow}}$$

redukált mátrixelem

nem függ M, M'-től!

Az atommag elektromos tulajdonságai

Átlagos négyzetes magsugár

$$\langle r^2 \rangle := \langle I, M | r^2 | I, M \rangle$$

0-adrendű szférikus tenzor

$$\langle r^2 \rangle = (-1)^{I-M} \underbrace{\begin{pmatrix} I & 0 & I \\ -M & 0 & M \end{pmatrix}}_{= \begin{pmatrix} I & I & 0 \\ M & -M & 0 \end{pmatrix} = (-1)^{I-M} \frac{1}{\sqrt{2I-1}}} \langle I \| r^2 \| I \rangle = \frac{\langle I \| r^2 \| I \rangle}{\sqrt{2I-1}}$$

M-től független (triviális)

Töltéssűrűség: $\varrho(r)$

$$\langle r^2 \rangle = \frac{1}{Ze} \int r^2 \varrho(r)\, d^3r$$

Közelítés: a mag homogén töltött gömb:

$$\varrho = \frac{3Ze}{4\pi R^3}$$

magsugár

$$\langle r^2 \rangle = \frac{3}{5} R^2$$

R a magállapottól függ: alapállapotban R_a, gerjesztett állapotban R_g

$\delta R / R \propto 10^{-4}$

$$\boxed{\langle r^2 \rangle_g - \langle r^2 \rangle_a} = \frac{3}{5}(R_g^2 - R_a^2) = \boxed{\frac{6}{5} R^2 \frac{\delta R}{R}}$$

^{119}Sn, ^{151}Eu: $\delta R > 0$

ahol

$$R = \frac{R_a + R_g}{2} \quad \text{és} \quad \delta R = R_g - R_a$$

^{57}Fe: $\delta R < 0$

Elektromos kvadrupólus-nyomaték

Kvantummechanikai kvadrupólus-nyomaték-tenzor:

$$\hat{Q}_{2m} := \sqrt{\frac{16\pi}{5}}\, r^2\, Y_2^m(\theta,\phi)$$

(másodrendű szférikus tenzoroperátor)

Várható értéke az $|I,M\rangle$ állapotban:

$$\langle I,M|\hat{Q}_{2m}|I,M\rangle = (-1)^{I-M} \underbrace{\begin{pmatrix} I & 2 & I \\ -M & m & M \end{pmatrix}}_{0,\ \text{ha } I<1,\ \text{vagyis } I=0 \text{ és } I=1/2 \text{ esetén}} \langle I\|Q_2\|I\rangle$$

Klasszikus kvadrupólus-nyomaték:

$$Q = \frac{1}{e}\sqrt{\frac{16\pi}{5}} \int r^2\, Y_2^0\, \varrho(r)\, d^3r$$

Kvantummechanikában:

$$Q := \langle I,I|\hat{Q}_{20}|I,I\rangle = \begin{pmatrix} I & 2 & I \\ -I & 0 & I \end{pmatrix} \langle I\|Q_2\|I\rangle$$

Q-val a többi komponens várható értéke is kifejezhető, a mag bármely állapotában:

$$\langle I,M|\hat{Q}_{2m}|I,M\rangle = (-1)^{I-M} \frac{\begin{pmatrix} I & 2 & I \\ -M & m & M \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} I & 2 & I \\ -I & 0 & I \end{pmatrix}}\, Q$$

0, ha $-M+m+M \neq 0$, vagyis ha $m \neq 0$