

Atommagok elektromágneses tulajdonságai és bomlása:

Atommagok: rezonáns kondenzált anyagokban

Kölcsönhatás: elektromágneses

ME, PAC, PAD, NO, NMR, NQR, ...

Mágneses dipólusnyomaték

Klasszikusan: $\underline{\mu} = \gamma \underline{I}$

↑
gyromágneses viszony

Kvantummechanikában:

$|I, M\rangle$ állapot

$$\mu := \langle I, I | \hat{\mu}_z | I, I \rangle$$

$$\hat{\mu}_z = \gamma \hat{I}_z$$

$$\langle I, I | \hat{I}_z | I, I \rangle = I \hbar$$

$$\mu = \gamma \hbar I$$

$$\gamma = g \frac{\mu_N}{\hbar}$$

$$\mu_N = \frac{e \hbar}{2 m_p} = 5.5 \cdot 10^{-27} \text{ A m}^2$$

(egy m_p tömegű és \hbar pályaimpulzusnyomatékú
e ponttöltés klasszikus mágneses dipólusnyomatéka)

$$\left. \begin{array}{l} \mu: \mu_N \text{ egységben} \\ I: \hbar \end{array} \right\} \Rightarrow g = \gamma$$

$$g_L(p) = 1$$

$$g_L(n) = 0$$

Dirac-elmélet:

$$g_S(p) = 2$$

$$g_S(n) = 0$$

Kísérleti adatok:

$$g_S(p) = 5.59$$

$$g_S(n) = -3.83$$

Mag: ha az impulzusnyomaték és a mágneses nyomaték egyetlen („világító”) nukleontól származnak (ps.-ptl. és ptl.-ps. magok), akkor

$$\hat{\underline{\mu}} = \underbrace{g_L \hat{\underline{L}}}_{\hat{\underline{\mu}}_L} + \underbrace{g_S \hat{\underline{S}}}_{\hat{\underline{\mu}}_S}$$

$$\hat{\underline{I}} = \hat{\underline{L}} + \hat{\underline{S}} \quad (S = 1/2)$$

Általánosított Landé-formula:

$$g = \frac{1}{2I(I+1)} \left\{ [I(I+1) + L(L+1) - S(S+1)] g_L + [I(I+1) + S(S+1) - L(L+1)] g_S \right\}$$

$$S = 1/2$$

$$I = L \pm 1/2$$

g-faktor egyéreszecske-modellben (Schmidt-görbék):

$$g = g_L \pm \frac{g_S - g_L}{2L+1}$$

$$(I = L \pm 1/2)$$

The figure consists of two plots showing the ratio of magnetic moments μ/μ_N versus the inverse of the nuclear spin I/\hbar .

Top Plot: The y-axis ranges from 0 to 6, and the x-axis ranges from 1/2 to 9/2. Data points for various isotopes are plotted, including ^7H , ^1H , ^{105}Ti , ^{203}Ti , ^{119}P , ^{63}Cu , ^{65}Cu , ^{23}Na , ^{69}Ga , ^{75}Br , ^{79}Br , ^{133}Cs , ^{151}Eu , ^{157}Eu , ^{165}Re , ^{127}I , ^{147}Pr , ^{25}Al , ^{55}Mn , ^{57}Fe , ^{59}Co , ^{51}V , ^{115}In , ^{113}In , ^{199}Au , ^{197}Au , ^{137}Ba , ^{135}Ba , ^{139}La , ^{141}Pr , ^{143}Pr , ^{145}Sm , ^{147}Sm , ^{149}Sm , ^{151}Sm , ^{153}Sm , ^{155}Eu , ^{157}Eu , ^{165}Dy , ^{167}Dy , ^{169}Er , ^{171}Er , ^{173}Er , ^{175}Er , ^{177}Er , ^{179}Er , ^{181}Er , ^{183}Er , ^{185}Er , ^{187}Er , ^{189}Er , ^{191}Er , ^{193}Er , ^{195}Er , ^{197}Er , ^{199}Er , ^{201}Er , ^{203}Er , ^{205}Er , ^{207}Er , ^{209}Er , ^{211}Er , ^{213}Er , ^{215}Er , ^{217}Er , ^{219}Er , ^{221}Er , ^{223}Er , ^{225}Er , ^{227}Er , ^{229}Er , ^{231}Er , ^{233}Er , ^{235}Er , ^{237}Er , ^{239}Er , ^{241}Er , ^{243}Er , ^{245}Er , ^{247}Er , ^{249}Er , ^{251}Er , ^{253}Er , ^{255}Er , ^{257}Er , ^{259}Er , ^{261}Er , ^{263}Er , ^{265}Er , ^{267}Er , ^{269}Er , ^{271}Er , ^{273}Er , ^{275}Er , ^{277}Er , ^{279}Er , ^{281}Er , ^{283}Er , ^{285}Er , ^{287}Er , ^{289}Er , ^{291}Er , ^{293}Er , ^{295}Er , ^{297}Er , ^{299}Er , ^{301}Er , ^{303}Er , ^{305}Er , ^{307}Er , ^{309}Er , ^{311}Er , ^{313}Er , ^{315}Er , ^{317}Er , ^{319}Er , ^{321}Er , ^{323}Er , ^{325}Er , ^{327}Er , ^{329}Er , ^{331}Er , ^{333}Er , ^{335}Er , ^{337}Er , ^{339}Er , ^{341}Er , ^{343}Er , ^{345}Er , ^{347}Er , ^{349}Er , ^{351}Er , ^{353}Er , ^{355}Er , ^{357}Er , ^{359}Er , ^{361}Er , ^{363}Er , ^{365}Er , ^{367}Er , ^{369}Er , ^{371}Er , ^{373}Er , ^{375}Er , ^{377}Er , ^{379}Er , ^{381}Er , ^{383}Er , ^{385}Er , ^{387}Er , ^{389}Er , ^{391}Er , ^{393}Er , ^{395}Er , ^{397}Er , ^{399}Er , ^{401}Er , ^{403}Er , ^{405}Er , ^{407}Er , ^{409}Er , ^{411}Er , ^{413}Er , ^{415}Er , ^{417}Er , ^{419}Er , ^{421}Er , ^{423}Er , ^{425}Er , ^{427}Er , ^{429}Er , ^{431}Er , ^{433}Er , ^{435}Er , ^{437}Er , ^{439}Er , ^{441}Er , ^{443}Er , ^{445}Er , ^{447}Er , ^{449}Er , ^{451}Er , ^{453}Er , ^{455}Er , ^{457}Er , ^{459}Er , ^{461}Er , ^{463}Er , ^{465}Er , ^{467}Er , ^{469}Er , ^{471}Er , ^{473}Er , ^{475}Er , ^{477}Er , ^{479}Er , ^{481}Er , ^{483}Er , ^{485}Er , ^{487}Er , ^{489}Er , ^{491}Er , ^{493}Er , ^{495}Er , ^{497}Er , ^{499}Er , ^{501}Er , ^{503}Er , ^{505}Er , ^{507}Er , ^{509}Er , ^{511}Er , ^{513}Er , ^{515}Er , ^{517}Er , ^{519}Er , ^{521}Er , ^{523}Er , ^{525}Er , ^{527}Er , ^{529}Er , ^{531}Er , ^{533}Er , ^{535}Er , ^{537}Er , ^{539}Er , ^{541}Er , ^{543}Er , ^{545}Er , ^{547}Er , ^{549}Er , ^{551}Er , ^{553}Er , ^{555}Er , ^{557}Er , ^{559}Er , ^{561}Er , ^{563}Er , ^{565}Er , ^{567}Er , ^{569}Er , ^{571}Er , ^{573}Er , ^{575}Er , ^{577}Er , ^{579}Er , ^{581}Er , ^{583}Er , ^{585}Er , ^{587}Er , ^{589}Er , ^{591}Er , ^{593}Er , ^{595}Er , ^{597}Er , ^{599}Er , ^{601}Er , ^{603}Er , ^{605}Er , ^{607}Er , ^{609}Er , ^{611}Er , ^{613}Er , ^{615}Er , ^{617}Er , ^{619}Er , ^{621}Er , ^{623}Er , ^{625}Er , ^{627}Er , ^{629}Er , ^{631}Er , ^{633}Er , ^{635}Er , ^{637}Er , ^{639}Er , ^{641}Er , ^{643}Er , ^{645}Er , ^{647}Er , ^{649}Er , $^{651}\$

Abb. 2.2: Experimenteller Verlauf der magnetischen Momente stabiler Kerne mit ungeradem Proton (oben) und ungeradem Neutron (unten) im Grundzustand. Die durchgezogene Linie gibt die Schmidt-Werte an, gestrichelt sind die sogenannten Dirac-Linien eingezeichnet die man erhält, wenn man für 95 die Dirac-Werte einsetzt (nach [MAY 84], Werte von [LED 78])

	I	μ_{Schmidt}	μ_{Dirac}
Páratlan proton- számú magokra:	$L + \frac{1}{2}$	$I + 2.3$	$I + \frac{1}{2}$
	$L - \frac{1}{2}$	$I - 2.3 \frac{I}{I+1}$	$I - \frac{1}{2} \frac{I}{I+1}$
Páros proton- számú magokra:	$L + \frac{1}{2}$	-1.92	0
	$L - \frac{1}{2}$	$1.92 \frac{I}{I+1}$	0

A kísérleti értékek csaknem mind a Schmidt- és a Dirac-görbék között vannak.

Elektromos kvadrupólusnyomaték

Klasszikusan: Tenzor: $Q_{\alpha\beta} = \frac{1}{e} \int (3x_\alpha x_\beta - r^2 \delta_{\alpha\beta}) g(r) d^3r$

$$Q = \frac{1}{e} \int (3z^2 - r^2) g(r) d^3r = \frac{1}{e} \sqrt{\frac{16\pi}{5}} \int r^2 Y_2^0(\theta, \phi) g(r) d^3r$$

Ha $g(r)$ gömbszimmetrikus, akkor $3z^2 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = r^2$

$$\Downarrow \\ Q = 0$$

Ha $g(r)$ nem gömbszimmetrikus, akkor egy homogén töltéslátszús forgási ellipszoiddal közelíthetjük:

$$Q = \frac{2}{5} Z (b^2 - a^2) = \frac{4}{5} Z R^2 \varepsilon$$

$Q < 0$ diszkosz (oblate)

$Q > 0$ szivar (prolate)

$$R = \frac{a+b}{2}$$

$$\varepsilon = \frac{b-a}{2}$$

$$|\varepsilon| \ll 0.1$$

Kivétel: hasadási izomerek ($\varepsilon \approx 1$)

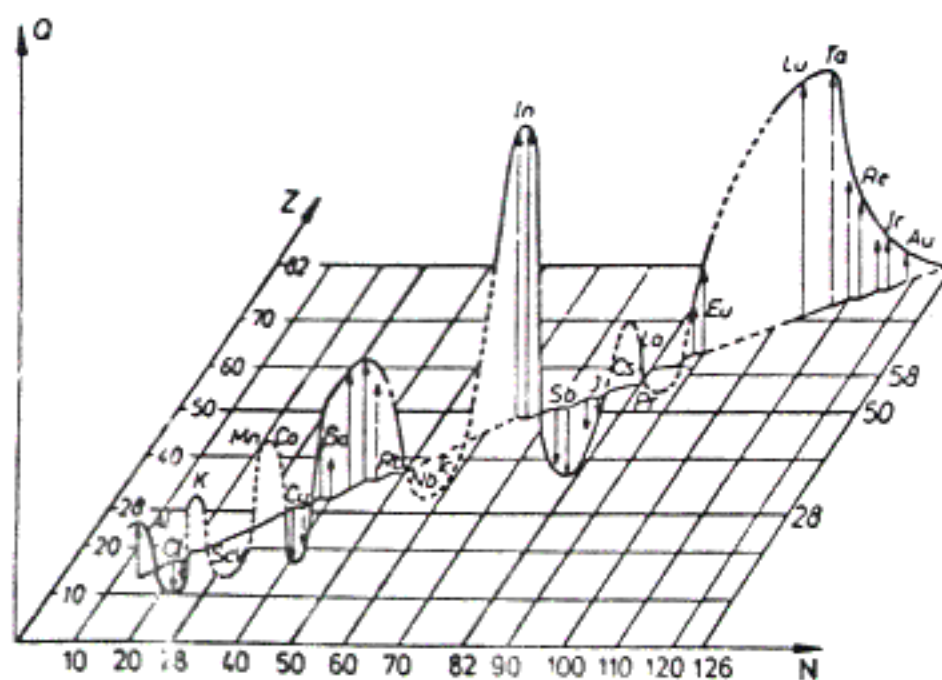


Abb. 2.3: Beobachtete Werte des Quadrupolmoments Q als Funktion der Kernladungszahl Z und der Neutronenzahl N . (Alle Werte bis zum In sind mit dem Faktor 10 multipliziert. Aus (KOP 56))

Atommagok elektromágneses bomlása

$$\begin{array}{lcl}
 \text{-----} & I_i \ M_i \ \pi_i & E_i = E_f + \hbar \omega \\
 \text{ } & \text{ } & \underline{I}_i = \underline{I}_f + \underline{L} \\
 \text{ } & \text{ } & \pi_i = \pi_f \cdot \pi \\
 \text{-----} & I_f \ M_f \ \pi_f &
 \end{array}$$

Keressük a Maxwell-egyenletek adott impulzusmomentákhöz és adott paritáshoz tartozó megoldásait (multipól-sugárzás).

Forrásmentes térben:

$$\underline{\nabla} \times \underline{E} = - \frac{\partial \underline{B}}{\partial t}$$

$$\underline{\nabla} \times \underline{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \underline{E}}{\partial t}$$

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{E} = 0$$

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{B} = 0$$



$$\left. \begin{array}{l}
 \underline{B}_e^m(\underline{r}, t) = f_e(kr) \underline{L} Y_e^m(\theta, \phi) e^{i\omega t} \\
 \underline{E}_e^m(\underline{r}, t) = i \frac{c}{k} \underline{\nabla} \times \underline{B}_e^m(\underline{r}, t)
 \end{array} \right\} \begin{array}{l}
 \pi = (-1)^l \\
 (E) \text{ elektromos} \\
 2^l\text{-pólus-sugárzás}
 \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l}
 \underline{E}_e^m(\underline{r}, t) = f_e(kr) \underline{L} Y_e^m(\theta, \phi) e^{i\omega t} \\
 \underline{B}_e^m(\underline{r}, t) = -i \frac{1}{kc} \underline{\nabla} \times \underline{E}_e^m(\underline{r}, t)
 \end{array} \right\} \begin{array}{l}
 \pi = (-1)^{l+1} \\
 (M) \text{ mágneses} \\
 2^l\text{-pólus-sugárzás}
 \end{array}$$

Impulzusmomenták: $\sqrt{l(l+1)} \hbar$

z-komponens: $m \hbar$

$$\omega = kc$$

$$\underline{L} = i(\underline{r} \times \underline{\nabla})$$

$f_e(kr)$: szférikus Bessel-függvény

Vektor-gömbfüggvények:

$$\underline{X}_e^m(\theta, \phi) = \frac{1}{\sqrt{l(l+1)}} \underline{L} Y_e^m(\theta, \phi)$$

Kiválasztási szabály az impulzusmomentákra (háromszög-egyenletrendszer):

$$l = I_i + I_f, \ I_i + I_f - 1, \dots, |I_i - I_f|$$

Tab. 2.1: Multipolordnungen bei γ -Übergängen

Drehimpuls- änderung ΔI		0 kein $0 \rightarrow 0$	1	2	3
Paritäts- wechsel	ja	E1 (M2)	E1 (M2)	M2 E3	E3 (M4)
	nein	M1 E2	M1 E2	E2 (M3)	M3 E4

Szögeloszlás

Energia-áramsűrűség (Poynting-vektor):

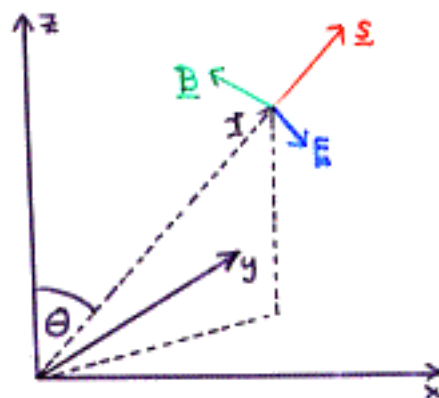
$$\underline{S} = \frac{1}{\mu_0} (\underline{E} \times \underline{B})$$

A hullámműködésben:

$$\epsilon_0 |\underline{E}|^2 = \frac{1}{\mu_0} |\underline{B}|^2$$



$$|\underline{E}| = c |\underline{B}|$$



$$|\underline{S}| = c \epsilon_0 |\underline{E}|^2 = \frac{c}{\mu_0} |\underline{B}|^2$$

Működésre: $|\underline{S}| = c \epsilon_0 |\underline{E}|^2 \sim |\sum_l Y_l^m(\theta, \phi)|^2$

E működésre: $|\underline{S}| = \frac{c}{\mu_0} |\underline{B}|^2 \sim |\sum_l Y_l^m(\theta, \phi)|^2$

Normált szögeloszlás:

$$F_{lm}(\theta) = \frac{|\sum_l Y_l^m(\theta, \phi)|^2}{\sum_m |\sum_l Y_l^m(\theta, \phi)|^2}$$

Tulajdonságok:

a) $\sum_m F_{lm}(\theta) = 1$

izotropia az m-összege

b) $F_{lm}(\theta) = F_{l,-m}(\theta)$

szimmetria m-ben

c) $F_{lm}(\theta) = F_{lm}(\pi - \theta)$

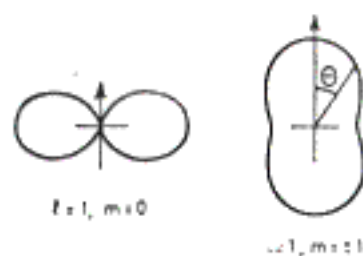
tükörszimmetria az x-y síkra

d) $F_{lm}(0) = 0$, ha $m \neq \pm 1$

Tab. 2.2: Winkelverteilungsfunktionen $F_{\ell m}(\vartheta)$ für Dipol- und Quadrupolstrahlung

	$m = 0$	$m = \pm 1$	$m = \pm 2$
$\ell = 1$ (Dipol)	$\frac{1}{2} \sin^2 \vartheta$	$\frac{1}{4} (1 + \cos^2 \vartheta)$	---
$\ell = 2$ (Quadrupol)	$\frac{3}{2} \sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta$	$\frac{1}{4} (1 - 3 \cos^2 \vartheta + 4 \cos^4 \vartheta)$	$\frac{1}{4} (1 - \cos^4 \vartheta)$

Dipol



Quadrupol

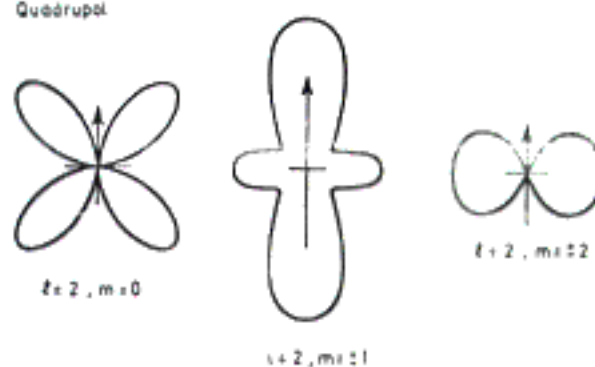


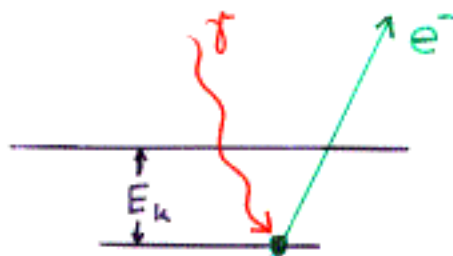
Abb. 2.6: Ausstrahlcharakteristik für reine Dipol- und Quadrupolstrahlung

A γ -sugárzás kimutatása

Sugárzás és anyag kölcsönhatása

- fotoeffektus
- Compton-effektus
- (- párkeltés)

Fotoeffektus



$$E_e = E_\gamma - E_k$$

$$E_{\text{det}} = E_e + E_k = E_\gamma$$



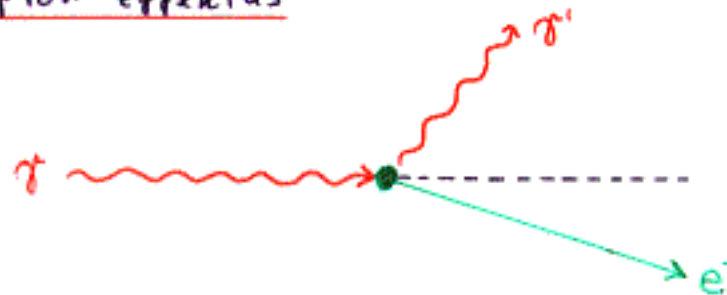
kisenergiájú röntgen-
fotonok és Auger-elektronok

Hatáskeresztmetszet:

$$\sigma_{\text{foto}} \sim E^{-7/2} Z^5$$

Alacsony energián (fény, UV, lágy röntgen, lágy γ) és magas
rendszerűnél (pl. I, Pb) jelentős.

Compton-effektus



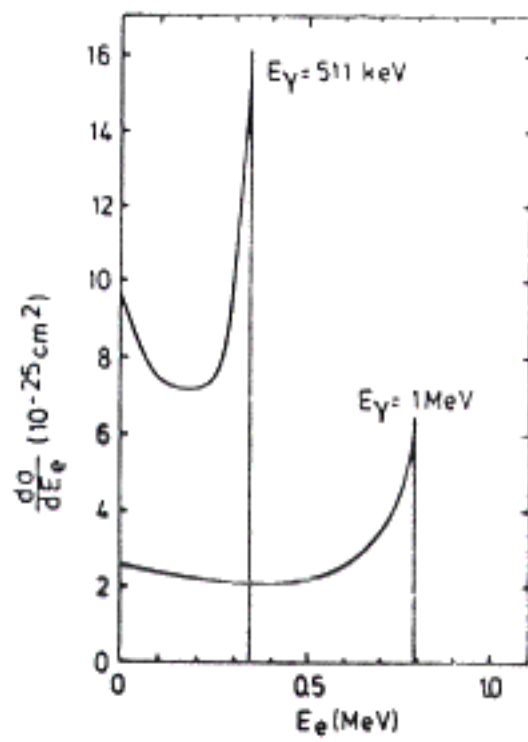


Abb. 2.8:
Energieverteilung der Compton-Elektronen für zwei verschiedene γ -Energien

$$E_e = E_\gamma \left[1 - \frac{1}{1 + \frac{E_\gamma}{m_e c^2} (1 - \cos \theta)} \right]$$

A meglökött elektron

minimális energiája: $E_e^{\min} = 0$ ($\theta = 0$)

maximális energiája:

$$E_e^{\max} = E_\gamma \frac{1}{1 + \frac{m_e c^2}{2 E_\gamma}}$$

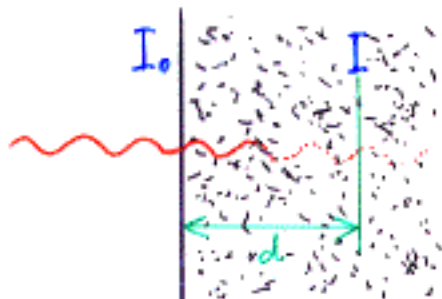
A Compton-elektronok energiaeloszlása

Hatáskeresztmetszet:

$$\sigma_c \sim E_\gamma^{-1} Z$$

Közepes (100 keV... 1 MeV) energián és alacsony rendszámúknál jelentős.

Abszorpciós együttható



$$I = I_0 e^{-\mu/d}$$

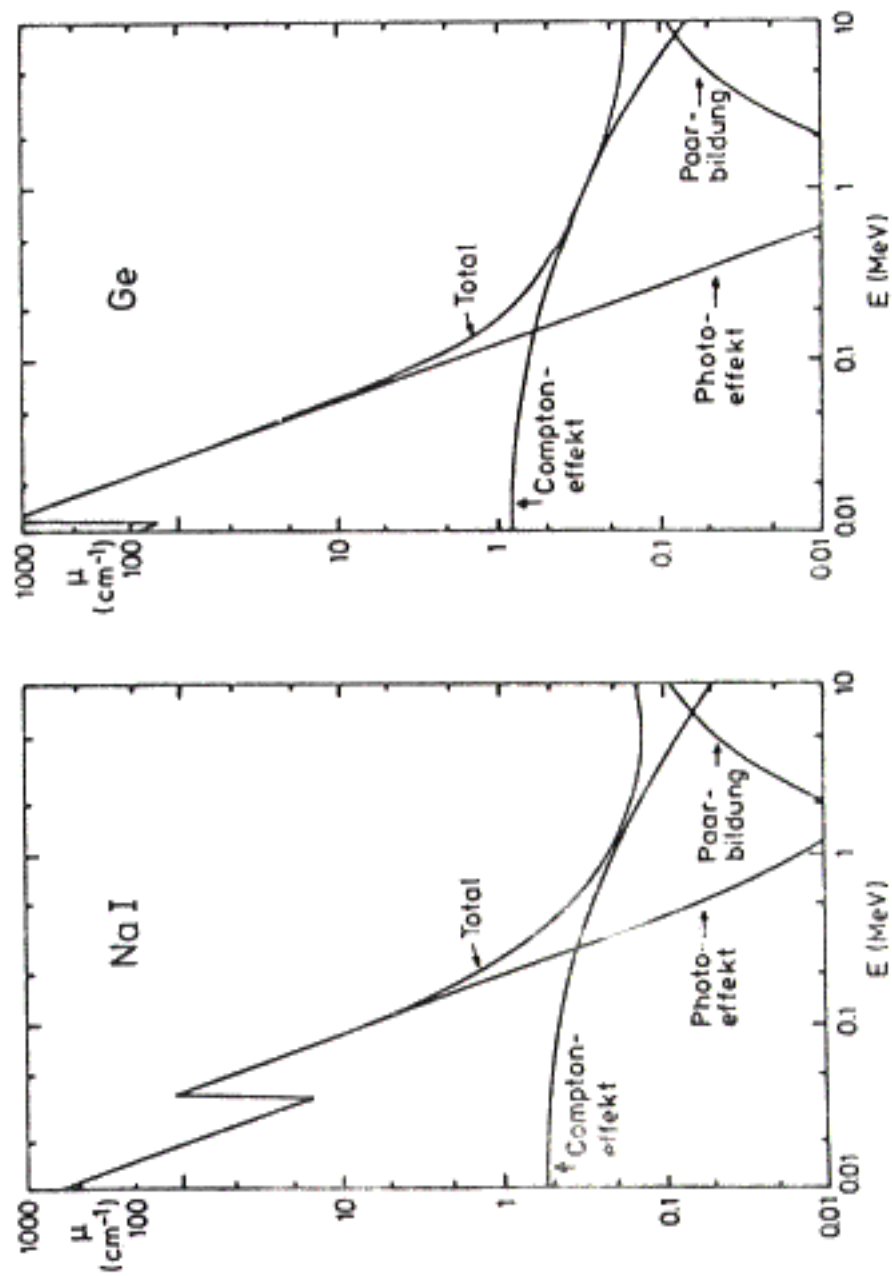


Abb. 2.9: Absorptionskoeffizienten für NaI und Ge

Anzahl der radiolysierten
Atome $\sim E_T$

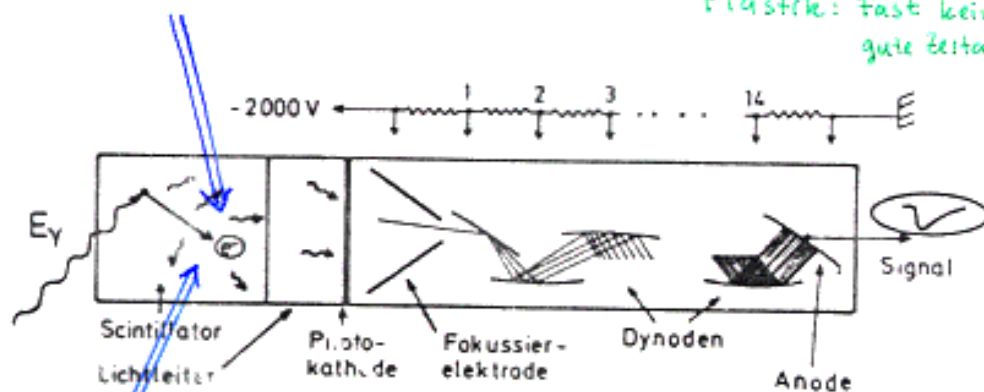


Abb. 2.10: Schematischer Aufbau eines Szintillationsdetektors

A radiolizált (ionizált vagy gerjesztett)
atomok száma $\sim E_T$

Szintillátorok:

NaI(Tl): mittlere Energieauflösung
($\sim 2 \dots 20\%$); schlechte
Zeitauflösung ($> 2 \text{ ns}$)

Plastik: Fast keine Energieauflösung;
gute Zeitauflösung ($\approx 200 \text{ ps}$)

Szintillátorok:

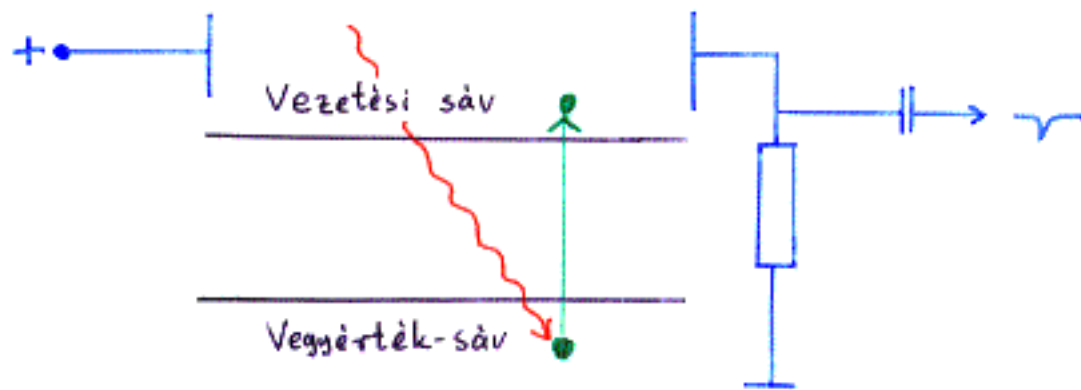
NaI(Tl): közepes ($\sim 2 \dots 20\%$) energia-

BaF₂ felbontás, gyenge ($> 2 \text{ ns}$)

időfelbontás

Plasztik: Energiafelbontás alig van,
jó ($\approx 200 \text{ ps}$) időfelbontás

Intrinsic Ge-detektor (i-Ge-detektor)



Nagyon tiszta Ge-kristályból készül (szennyezőkoncentráció $\lesssim 10^{-10}$). Csak kis méretben állítható elő.

Ge (Li)-detektor (p-i-n-dióda)

Általában hengeres elrendezésű p-i-n-dióda, nagy intrinsic tartalommal. Nagy térfogat ($\lesssim 100 \text{ cm}^3$).

A Ge-detektorok energiatárolása igen jó ($\sim 2\ldots 3\%$); időfelbontásuk gyenge ($\sim 5 \text{ ns}$).

Lavina-fotodióda (APD)

Zárlóirányban előfeszített p-n-dióda. A kiürített rétegben a sugárzás hatására lavina jön létre (hasonlóan a Zener-diódához). Energiaszétválasztása gyakorlatilag nincs. Időfelbontása igen jó ($\lesssim 500 \text{ ps}$).

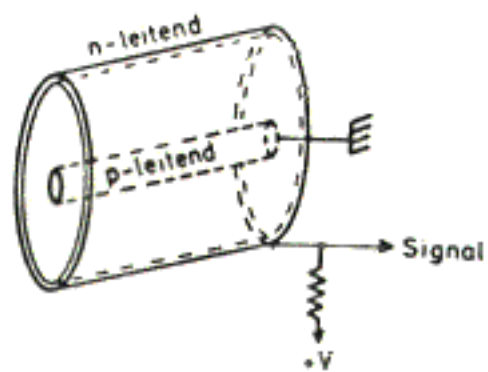


Abb. 2.12:
Aufbau eines Ge(Li)-Detektors

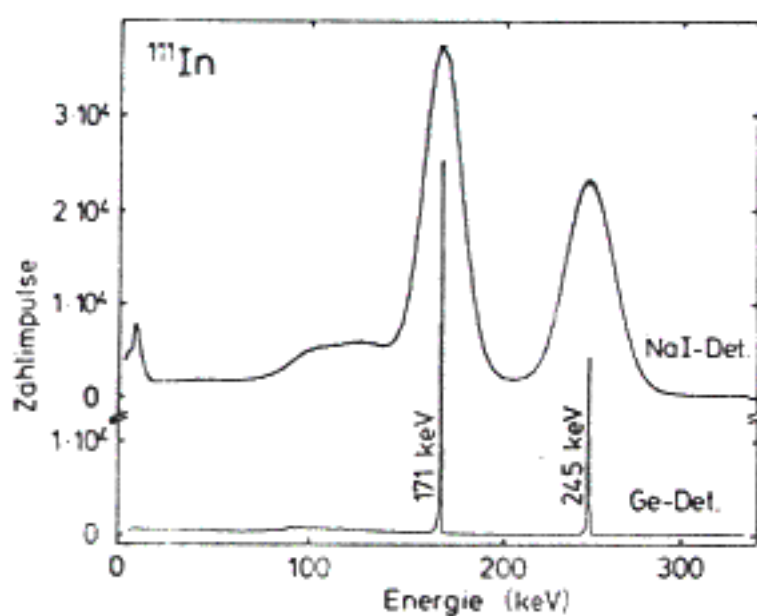
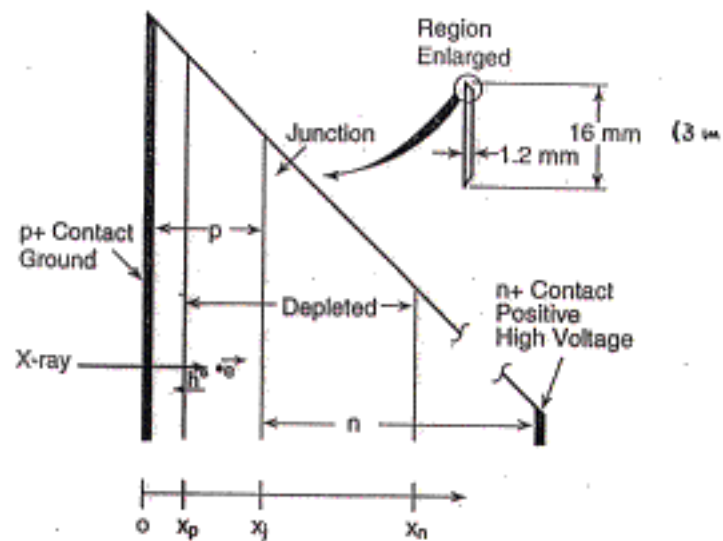
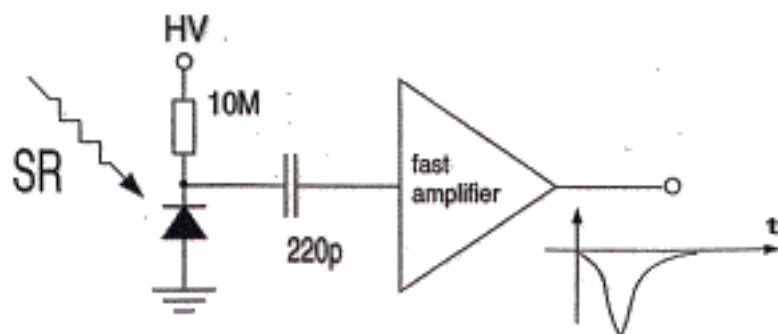


Abb. 2.11: Energiespektrum einer ^{111}In Quelle aufgenommen mit einem NaI(Tl)- (oben) und einem i-Ge-Detektor (unten)

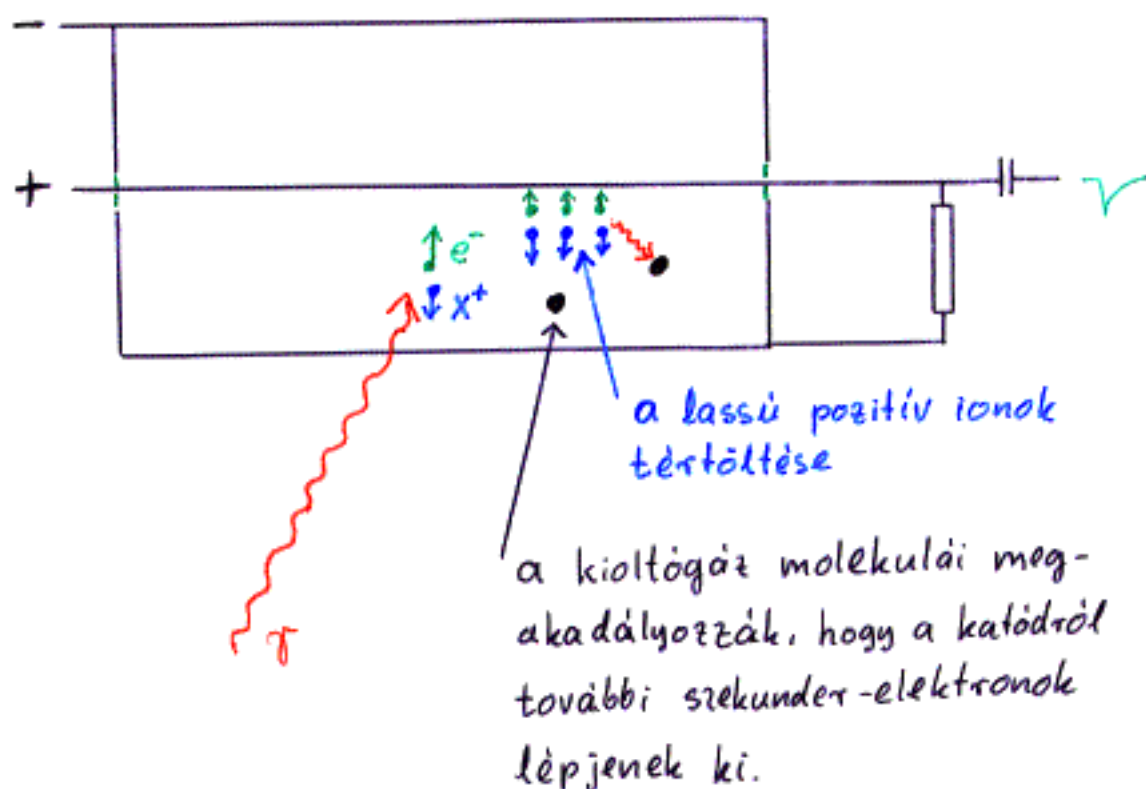
APD: Avelanche Photo Diode



APD operational setup:



Proporcionális számláló



Gázerősítés: $10^2 \dots 10^4$

Csak alacsony energiájú gamma-sugárzás ($\sim 10 \text{ keV}$) detektálására alkalmas. Kivétel: abszorpciós él (pl. Kr a 14.4 keV -os fotonokra). Ilyenkor viszont kismérési csúcs is megjelenik.

Energiafelbontása jó ($\sim 10\%$), időfelbontása nagyon rossz ($\sim 1 \mu\text{s}$).

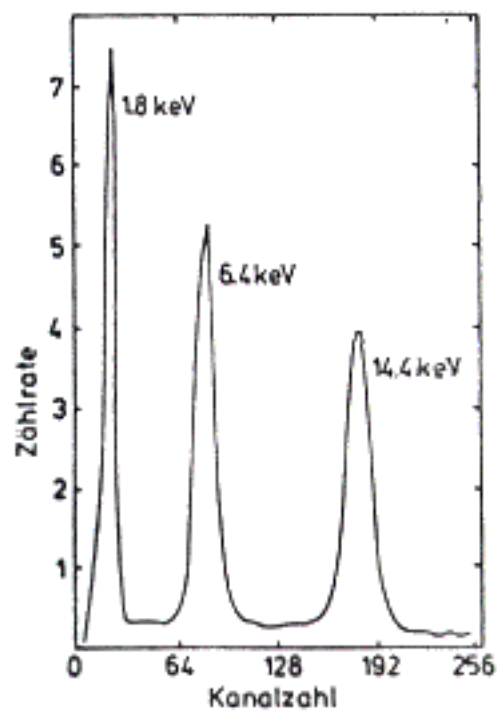


Abb. 4.14:

Impulshöhenspektrum einer ^{57}Co Mößbauer-Quelle aufgenommen mit einem Proportionalzählrohr, dessen Zählgas aus 97 % Krypton und 3 % CO_2 besteht

- Impulzusnyomatékok csatolása, szférikus tenzorok

$$\underline{j}_3 = \underline{j}_1 + \underline{j}_2$$

$$|j_3, m_3\rangle = \sum_{\substack{m_1, m_2 \\ m_3 = m_1 + m_2}} (j_1, j_2, m_1, m_2 | j_3, m_3) |j_1, m_1\rangle |j_2, m_2\rangle$$

\uparrow
 $C(j_1, j_2, j_3; m_1, m_2, m_3) \cdot (-1)^{j_1 + m_1}$
 Clebsch-Gordan-együtthatók

j_1, j_2, j_3 : háromszög-egyenlőtlenség

Wigner-féle 3j-szimbolumok:

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} := (-1)^{j_1 - j_2 - m_3} \frac{1}{\sqrt{2j_3 + 1}} (j_1, j_2, m_1, m_2 | j_3, -m_3)$$

A 3j-szimbolumok szimmetria-tulajdonságai:

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_2 & j_3 & j_1 \\ m_2 & m_3 & m_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_3 & j_1 & j_2 \\ m_3 & m_1 & m_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} j_2 & j_1 & j_3 \\ m_2 & m_1 & m_3 \end{pmatrix} = (-1)^{j_1 + j_2 + j_3} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ -m_1 & -m_2 & -m_3 \end{pmatrix} = (-1)^{j_1 + j_2 + j_3} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}$$

Speciális esetek:

$$\begin{pmatrix} j & j & 0 \\ m & -m & 0 \end{pmatrix} = (-1)^{j-m} \frac{1}{\sqrt{2j+1}}$$

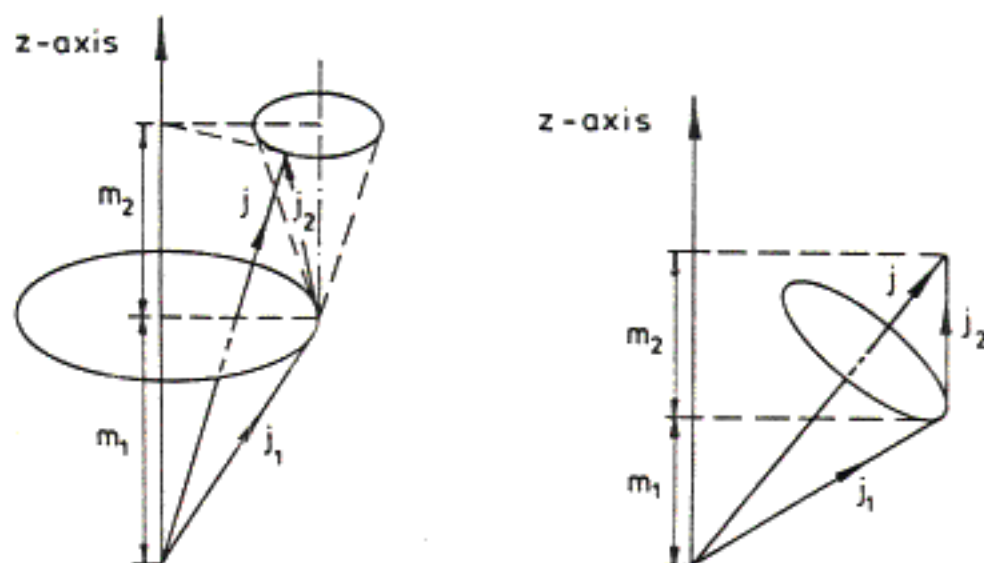


Fig. 1.5. Graphical representation of two angular momenta j_1 and j_2 , shown as vectors that make a precession around the z -axis with constant angular velocity (vector model). Using the addition to a momentum $j = j_1 + j_2$, the probability of obtaining a given value for the length j , given fixed m_1 and m_2 values, is given by the Clebsch-Gordan coefficient squared $|\langle j_1 m_1, j_2 m_2 | j m \rangle|^2$. If the two vectors j_1 and j_2 are coupled to form the total angular momentum j (which is a constant of motion), the two vectors will make a precession around the direction of j . For fixed value of the length of j and projection m , the projections m_1 and m_2 can be obtained again as a probability distribution given by the Clebsch-Gordan coefficient squared $|\langle j_1 m_1, j_2 m_2 | j m \rangle|^2$.

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0, \text{ ha } j_1 + j_2 + j_3 = \text{páratlan}$$

Ha $j_1 + j_2 + j_3 = 2p = \text{páros}$, akkor

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (-1)^p \sqrt{\frac{(2p-2j_1)!(2p-2j_2)!(2p-2j_3)!}{(2p+1)!}} \times$$

$$\times \frac{p!}{(p-j_1)!(p-j_2)!(p-j_3)!}$$

Másodrendű tenzor felbontása

$$T_{ik} = \overset{\text{Skalár}}{\downarrow} I_{ik} + \underbrace{\overset{\text{antiszimmetrikus}}{\downarrow} A_{ik} + \overset{\text{szimmetrikus}}{\downarrow} S_{ik}}_{\text{nyom-mentes}}$$

$$I_{ik} = \frac{1}{3} \text{Tr}(T_{ik}) \delta_{ik} \quad \text{skalár (1)}$$

$$A_{ik} = \frac{1}{2} (T_{ik} - T_{ki}) = -A_{ki} \quad \text{vektor (3)}$$

$$S_{ik} = \frac{1}{2} (T_{ik} + T_{ki}) - \frac{1}{3} \text{Tr}(T_{ik}) \delta_{ik} \quad \text{tenzor (5)}$$

Az 1. vektor szférikus komponensei:

$$T_+ = -\frac{1}{\sqrt{2}} (x + iy) = -\frac{1}{\sqrt{2}} r \sin \theta e^{i\phi} = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} r Y_1^1(\theta, \phi)$$

$$T_0 = z = r \cos \theta = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} r Y_1^0(\theta, \phi)$$

$$T_- = \frac{1}{\sqrt{2}} (x - iy) = \frac{1}{\sqrt{2}} r \sin \theta e^{-i\phi} = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} r Y_1^{-1}(\theta, \phi)$$

↑
1. rendű szférikus tenzor

$T(l, m)$ l -ed rendű szférikus tenzor, ha $T(l, m)$ elemei forgásoknál úgy transzformálódnak, mint az $Y_l^m(\theta, \phi)$ gömbfüggvények.

$$T(l, m) = \sum_{\substack{m_1, m_2 \\ m_1 + m_2 = m}} (l_1, l_2, m_1, m_2 | l, m) T_1(l_1, m_1) T_2(l_2, m_2)$$

Skalárszorzat:

$$T(0, 0) = \sum_{m_1 + m_2 = 0} (1, 1, m_1, m_2 | 0, 0) T_1(1, m_1) T_2(1, m_2)$$

Vektorszorzat:

$$T(1, m) = \sum_{m_1 + m_2 = m} (1, 1, m_1, m_2 | 1, m) T_1(1, m_1) T_2(1, m_2)$$

Tenzorszorzat:

$$T(2, m) = \sum_{m_1 + m_2 = m} (1, 1, m_1, m_2 | 2, m) T_1(1, m_1) T_2(1, m_2)$$

Wigner - Eckart - tétel

$\hat{T}(l, m)$: l -ed rendű szférikus tenzoroperátor

$\hat{T}(l, m)$ mátrixelemei:

$$\langle I', M' | \hat{T}(l, m) | I, M \rangle = (-1)^{I'-M'} \underbrace{\begin{pmatrix} I' & l & I \\ -M' & m & M \end{pmatrix}}_{C(I', l, I; -M', m, M)} \underbrace{\langle I' || T(l) || I \rangle}_{\text{redukált mátrixelem}}$$

redukált mátrixelem
nem függ M, M' -től!

Az atommag elektromos tulajdonságai

Átlagos négyzetes magsugár

$$\langle r^2 \rangle := \langle I, M | r^2 | I, M \rangle$$

$$\begin{aligned} \langle r^2 \rangle &= (-1)^{I-M} \underbrace{\begin{pmatrix} I & 0 & I \\ -M & 0 & M \end{pmatrix}}_{= \begin{pmatrix} I & I & 0 \\ M & -M & 0 \end{pmatrix}} \langle I || r^2 || I \rangle = \frac{\langle I || r^2 || I \rangle}{\sqrt{2I-1}} \\ &= (-1)^{I-M} \frac{1}{\sqrt{2I-1}} \quad \downarrow \\ &\quad \text{M-től független (trivialis)} \end{aligned}$$

↑
0-adrendű szférikus tenzor

Töltéssűrűség: $\rho(r)$

$$\langle r^2 \rangle = \frac{1}{Ze} \int r^2 \rho(r) d^3r$$

Közelítés: a mag homogén töltött gömb:

$$\rho = \frac{3Ze}{4\pi R^3}$$

↑ magsugár

$$\langle r^2 \rangle = \frac{3}{5} R^2$$

R a magállapottól függ: alapállapotban R_a , gerjesztett állapotban R_g

$$\langle r^2 \rangle_g - \langle r^2 \rangle_a = \frac{3}{5} (R_g^2 - R_a^2) = \frac{6}{5} R^2 \frac{\delta R}{R}$$

ahol

$$R = \frac{R_a + R_g}{2} \quad \text{és} \quad \delta R = R_g - R_a$$

$$\delta R / R \approx 10^{-4}$$

$^{119}\text{Sn}, ^{151}\text{Eu}$:

$$\delta R > 0$$

^{57}Fe :

$$\delta R < 0$$

Elektromos kvadrupólus-nyomaték

Kvantummechanikai kvadrupólus-nyomaték-tenzor:

$$\hat{Q}_{2m} := \sqrt{\frac{16\pi}{5}} r^2 Y_2^m(\theta, \phi)$$

(másodrendű szférikus tenzoroperátor)

Várható értéke az $|I, M\rangle$ állapotban:

$$\langle I, M | \hat{Q}_{2m} | I, M \rangle = (-1)^{I-M} \underbrace{\begin{pmatrix} I & 2 & I \\ -M & m & M \end{pmatrix}}_{0, \text{ ha } I < 1, \text{ vagyis } I=0 \text{ és } I=1/2 \text{ esetén}} \langle I || Q_2 || I \rangle$$

Klasszikus kvadrupólus-nyomaték:

$$Q = \frac{1}{e} \sqrt{\frac{16\pi}{5}} \int r^2 Y_2^0 g(r) d^3r$$

Kvantummechanikában:

$$Q := \langle I, I | \hat{Q}_{20} | I, I \rangle = \begin{pmatrix} I & 2 & I \\ -I & 0 & I \end{pmatrix} \langle I || Q_2 || I \rangle$$

Q -val a többi komponens várható értéke is kifejezhető, a mag bármely állapotában:

$$\langle I, M | \hat{Q}_{2m} | I, M \rangle = (-1)^{I-M} \frac{\begin{pmatrix} I & 2 & I \\ -M & m & M \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} I & 2 & I \\ -I & 0 & I \end{pmatrix}} Q$$

0, ha $-M+m+M \neq 0$,
vagyis ha $m \neq 0$