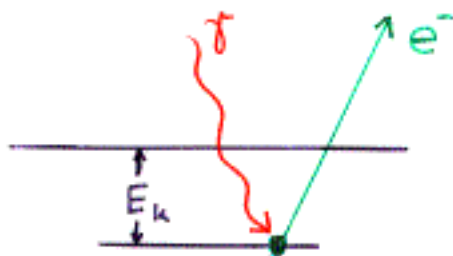


A γ -sugárzás kimutatása

Sugárzás és anyag kölcsönhatása

- fotoeffektus
- Compton-effektus
- (- párkeltés)

Fotoeffektus



$$E_e = E_\gamma - E_k$$

$$E_{\text{det}} = E_e + E_k = E_\gamma$$



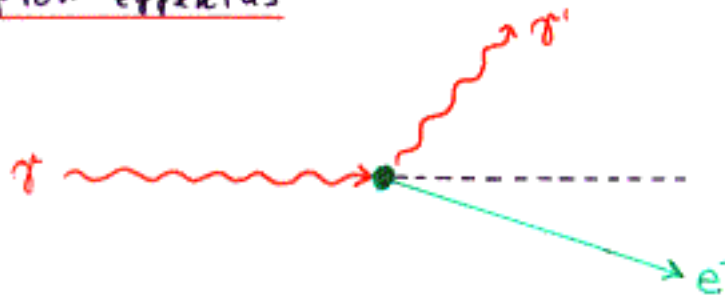
kisenergiájú röntgen-
fotonok és Auger-elektronok

Hatáskeresztmetszet:

$$\sigma_{\text{foto}} \sim E^{-7/2} Z^5$$

Alacsony energián (fény, UV, lágy röntgen, lágy γ) és magas rendszámmal (pl. I, Pb) jelentős.

Compton-effektus



- Impulzusnyomatékok csatolása, szférikus tenzorok

$$\underline{j}_3 = \underline{j}_1 + \underline{j}_2$$

$$|j_3, m_3\rangle = \sum_{\substack{m_1, m_2 \\ m_3 = m_1 + m_2}} (j_1, j_2, m_1, m_2 | j_3, m_3) |j_1, m_1\rangle |j_2, m_2\rangle$$

\uparrow
 $C(j_1, j_2, j_3; m_1, m_2, m_3) \cdot (-1)^{j_1 + m_1}$
 Clebsch-Gordan-együtthatók

j_1, j_2, j_3 : háromszög-egyenlőtlenség

Wigner-féle 3j-szimbolumok:

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} := (-1)^{j_1 - j_2 - m_3} \frac{1}{\sqrt{2j_3 + 1}} (j_1, j_2, m_1, m_2 | j_3, -m_3)$$

A 3j-szimbolumok szimmetria-tulajdonságai:

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_2 & j_3 & j_1 \\ m_2 & m_3 & m_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_3 & j_1 & j_2 \\ m_3 & m_1 & m_2 \end{pmatrix}$$

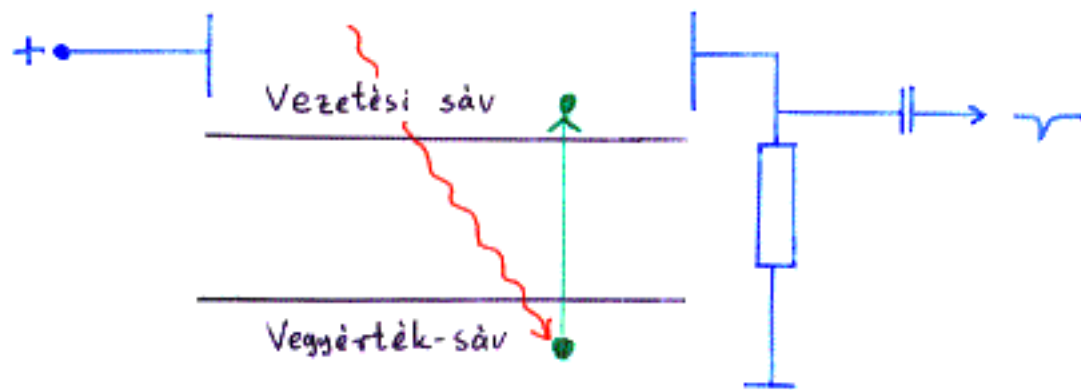
$$\begin{pmatrix} j_2 & j_1 & j_3 \\ m_2 & m_1 & m_3 \end{pmatrix} = (-1)^{j_1 + j_2 + j_3} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ -m_1 & -m_2 & -m_3 \end{pmatrix} = (-1)^{j_1 + j_2 + j_3} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}$$

Speciális esetek:

$$\begin{pmatrix} j & j & 0 \\ m & -m & 0 \end{pmatrix} = (-1)^{j-m} \frac{1}{\sqrt{2j+1}}$$

Intrinsic Ge-detektor (i-Ge-detektor)



Nagyon tiszta Ge-kristályból készül (szennyezőkoncentráció $\lesssim 10^{-10}$). Csak kis méretben állítható elő.

Ge (Li)-detektor (p-i-n-dióda)

Általában hengeres elrendezésű p-i-n-dióda, nagy intrinsic tartalommal. Nagy térfogat ($\lesssim 100 \text{ cm}^3$).

A Ge-detektorok energiatárolása igen jó ($\sim 2\text{...}3\%$); időfelbontásuk gyenge ($\sim 5 \text{ ns}$).

Lavina-fotodióda (APD)

Zárványban előeszített p-n-dióda. A kiürített rétegben a sugárzás hatására lavina jön létre (hasonlóan a Zener-diódához). Energiatárolása gyakorlatilag nincs. Időfelbontása igen jó ($\lesssim 500 \text{ ps}$).

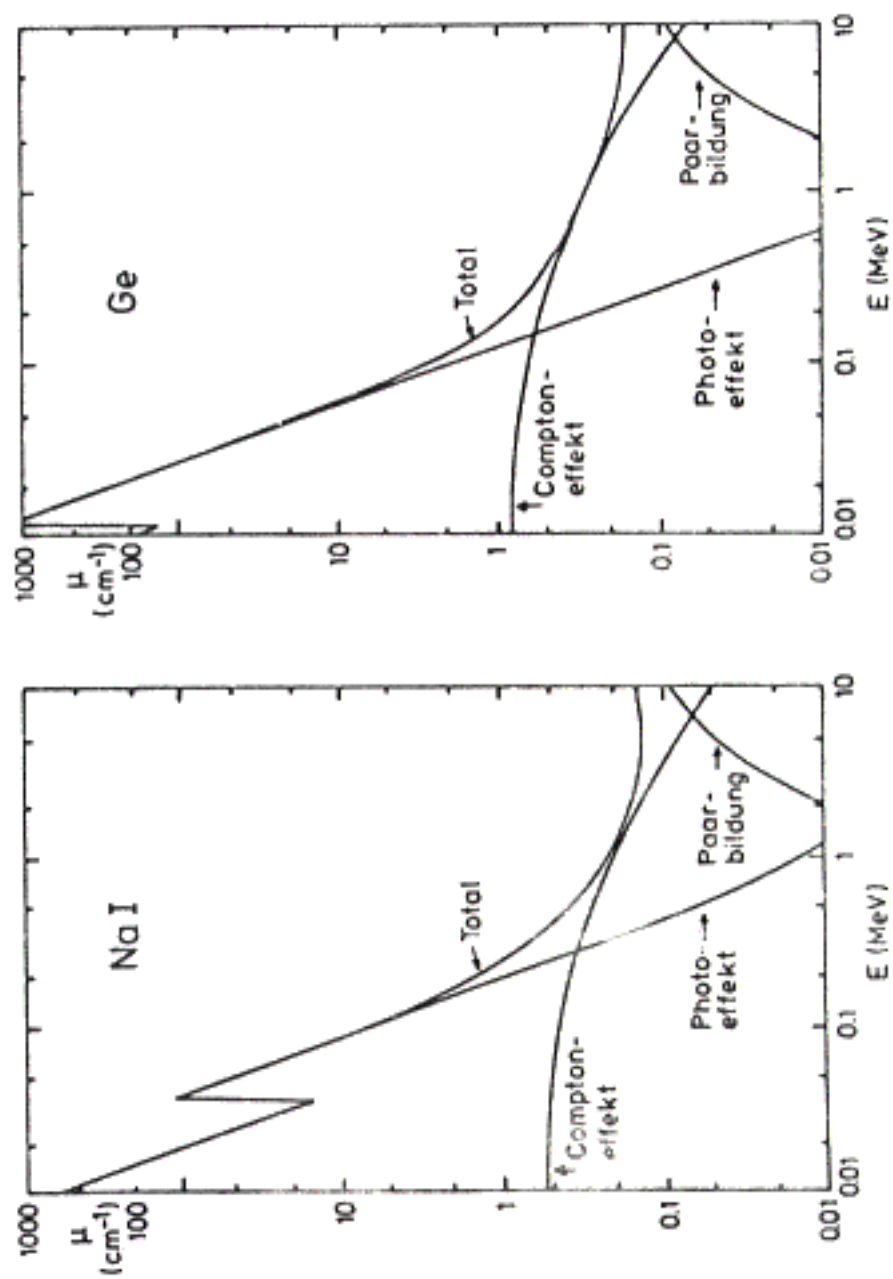


Abb. 2.9: Absorptionskoeffizienten für NaI und Ge

Atommagok elektromágneses tulajdonságai és bomlása:

Atommagok: szondák kondenzált anyagokban

Kölcsönhatás: elektromágneses

ME, PAC, PAD, NO, NMR, NQR, ...

Mágneses dipólusnyomaték

Klasszikusan: $\underline{\mu} = \gamma \underline{I}$

↑
gyromágneses viszony

Kvantummechanikában:

$|I, M\rangle$ állapot

$$\mu := \langle I, I | \hat{\mu}_z | I, I \rangle$$

$$\hat{\mu}_z = \gamma \hat{I}_z$$

$$\langle I, I | \hat{I}_z | I, I \rangle = I \hbar$$

$$\mu = \gamma \hbar I$$

$$\gamma = g \frac{\mu_N}{\hbar}$$

$$\mu_N = \frac{e \hbar}{2 m_p} = 5.5 \cdot 10^{-27} \text{ A m}^2$$

(egy m_p tömegű és \hbar pályaimpulzusnyomatékú
e ponttöltés klasszikus mágneses dipólusnyomatéka)

$$\left. \begin{array}{l} \mu: \mu_N \text{ egységben} \\ I: \hbar \end{array} \right\} \Rightarrow g = \gamma$$

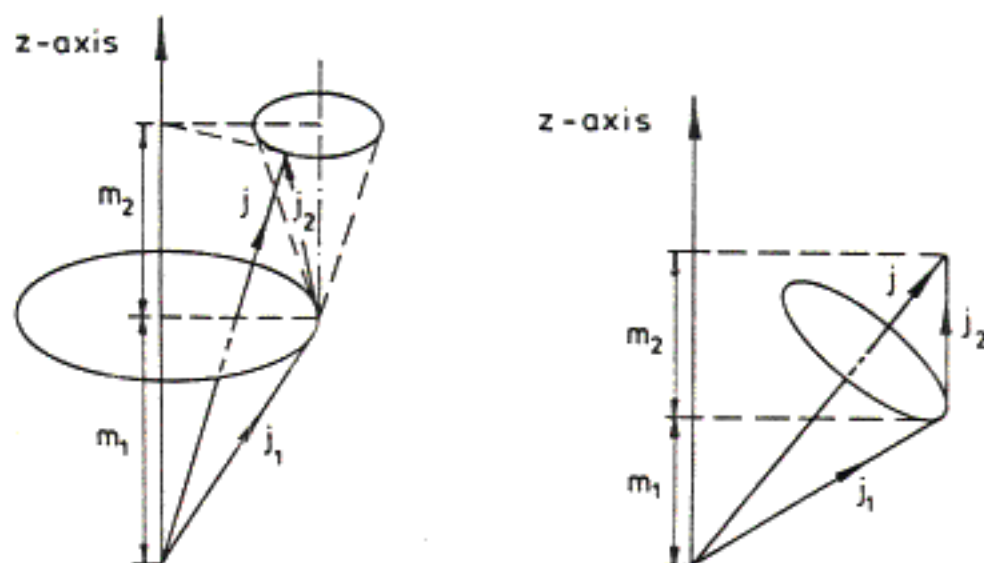


Fig. 1.5. Graphical representation of two angular momenta j_1 and j_2 , shown as vectors that make a precession around the z -axis with constant angular velocity (vector model). Using the addition to a momentum $j = j_1 + j_2$, the probability of obtaining a given value for the length j , given fixed m_1 and m_2 values, is given by the Clebsch-Gordan coefficient squared $|\langle j_1 m_1, j_2 m_2 | j m \rangle|^2$. If the two vectors j_1 and j_2 are coupled to form the total angular momentum j (which is a constant of motion), the two vectors will make a precession around the direction of j . For fixed value of the length of j and projection m , the projections m_1 and m_2 can be obtained again as a probability distribution given by the Clebsch-Gordan coefficient squared $|\langle j_1 m_1, j_2 m_2 | j m \rangle|^2$.

Anzahl der radiolysierten
Atome $\sim E_T$

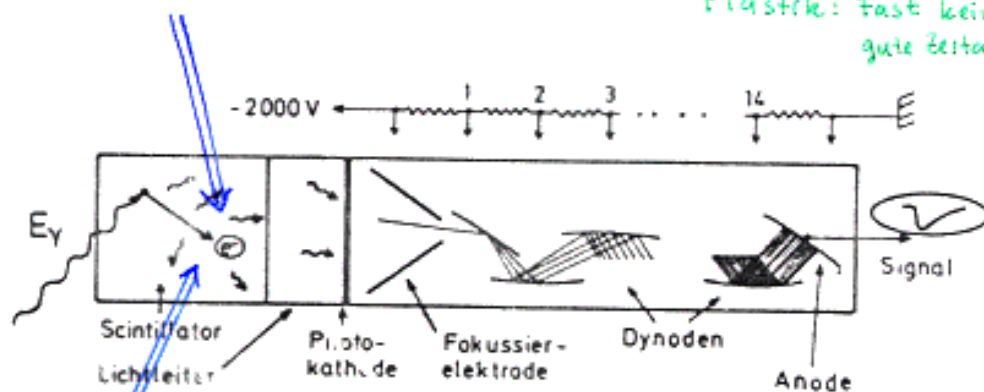


Abb. 2.10: Schematischer Aufbau eines Szintillationsdetektors

A radiolizált (ionizált vagy gerjesztett)
atomok száma $\sim E_T$

Szintillátorok:

NaI(Tl): mittlere Energieauflösung
($\sim 2 \dots 20\%$); schlechte
Zeitauflösung ($> 2 \text{ ns}$)

Plastik: Fast keine Energieauflösung;
gute Zeitauflösung ($\approx 200 \text{ ps}$)

Szintillátorok:

NaI(Tl): közepes ($\sim 2 \dots 20\%$) energia-

BaF₂ felbontás, gyenge ($> 2 \text{ ns}$)

időfelbontás

Plasztik: Energiafelbontás alig van,
jó ($\approx 200 \text{ ps}$) időfelbontás

	I	μ_{Schmidt}	μ_{Dirac}
Páratlan proton- számú magokra:	$L + \frac{1}{2}$	$I + 2.3$	$I + \frac{1}{2}$
	$L - \frac{1}{2}$	$I - 2.3 \frac{I}{I+1}$	$I - \frac{1}{2} \frac{I}{I+1}$
Páros proton- számú magokra:	$L + \frac{1}{2}$	-1.92	0
	$L - \frac{1}{2}$	$1.92 \frac{I}{I+1}$	0

A kísérleti értékek csaknem mind a Schmidt- és a Dirac-görbék között vannak.

Elektromos kvadrupólusnyomaték

Klasszikusan: Tenzor: $Q_{\alpha\beta} = \frac{1}{e} \int (3x_\alpha x_\beta - r^2 \delta_{\alpha\beta}) g(r) d^3r$

$$Q = \frac{1}{e} \int (3z^2 - r^2) g(r) d^3r = \frac{1}{e} \sqrt{\frac{16\pi}{5}} \int r^2 Y_2^0(\theta, \phi) g(r) d^3r$$

Ha $g(r)$ gömbszimmetrikus, akkor $3z^2 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = r^2$

$$\Downarrow \\ Q = 0$$

Ha $g(r)$ nem gömbszimmetrikus, akkor egy homogén töltéslátszús forgási ellipszoiddal közelíthetjük:

$$Q = \frac{2}{5} Z (b^2 - a^2) = \frac{4}{5} Z R^2 \varepsilon$$

$Q < 0$ diszkosz (oblate)

$Q > 0$ szivar (prolate)

$$R = \frac{a+b}{2}$$

$$\varepsilon = \frac{b-a}{2}$$

$$|\varepsilon| \ll 0.1$$

Kivétel: hasadási izomerek ($\varepsilon \approx 1$)

The figure consists of two plots showing the ratio of magnetic moments μ/μ_N versus the inverse of the nuclear spin I/\hbar .

Top Plot: The y-axis ranges from 0 to 6, and the x-axis ranges from 1/2 to 9/2. Data points are plotted for various isotopes, including ^7H , ^7Li , ^{11}B , ^{19}F , ^{23}Na , ^{39}K , ^{41}Ca , ^{43}Ca , ^{51}V , ^{55}Co , ^{57}Fe , ^{59}Co , ^{63}Cu , ^{65}Cu , ^{75}As , ^{79}Br , ^{81}Br , ^{85}Kr , ^{87}Rb , ^{89}Y , ^{91}Zr , ^{93}Nb , ^{95}Mo , ^{97}Mo , ^{101}Ru , ^{103}Rh , ^{105}Ag , ^{107}Ag , ^{109}Ag , ^{111}Ag , ^{113}Ag , ^{115}Ag , ^{117}Ag , ^{119}Ag , ^{121}Ag , ^{123}Ag , ^{125}Ag , ^{127}Ag , ^{129}Ag , ^{131}Ag , ^{133}Ag , ^{135}Ag , ^{137}Ag , ^{139}Ag , ^{141}Ag , ^{143}Ag , ^{145}Ag , ^{147}Ag , ^{149}Ag , ^{151}Ag , ^{153}Ag , ^{155}Ag , ^{157}Ag , ^{159}Ag , ^{161}Ag , ^{163}Ag , ^{165}Ag , ^{167}Ag , ^{169}Ag , ^{171}Ag , ^{173}Ag , ^{175}Ag , ^{177}Ag , ^{179}Ag , ^{181}Ag , ^{183}Ag , ^{185}Ag , ^{187}Ag , ^{189}Ag , ^{191}Ag , ^{193}Ag , ^{195}Ag , ^{197}Ag , ^{199}Ag , ^{201}Ag , ^{203}Ag , ^{205}Ag , ^{207}Ag , ^{209}Ag , ^{211}Ag , ^{213}Ag , ^{215}Ag , ^{217}Ag , ^{219}Ag , ^{221}Ag , ^{223}Ag , ^{225}Ag , ^{227}Ag , ^{229}Ag , ^{231}Ag , ^{233}Ag , ^{235}Ag , ^{237}Ag , ^{239}Ag , ^{241}Ag , ^{243}Ag , ^{245}Ag , ^{247}Ag , ^{249}Ag , ^{251}Ag , ^{253}Ag , ^{255}Ag , ^{257}Ag , ^{259}Ag , ^{261}Ag , ^{263}Ag , ^{265}Ag , ^{267}Ag , ^{269}Ag , ^{271}Ag , ^{273}Ag , ^{275}Ag , ^{277}Ag , ^{279}Ag , ^{281}Ag , ^{283}Ag , ^{285}Ag , ^{287}Ag , ^{289}Ag , ^{291}Ag , ^{293}Ag , ^{295}Ag , ^{297}Ag , ^{299}Ag , ^{301}Ag , ^{303}Ag , ^{305}Ag , ^{307}Ag , ^{309}Ag , ^{311}Ag , ^{313}Ag , ^{315}Ag , ^{317}Ag , ^{319}Ag , ^{321}Ag , ^{323}Ag , ^{325}Ag , ^{327}Ag , ^{329}Ag , ^{331}Ag , ^{333}Ag , ^{335}Ag , ^{337}Ag , ^{339}Ag , ^{341}Ag , ^{343}Ag , ^{345}Ag , ^{347}Ag , ^{349}Ag , ^{351}Ag , ^{353}Ag , ^{355}Ag , ^{357}Ag , ^{359}Ag , ^{361}Ag , ^{363}Ag , ^{365}Ag , ^{367}Ag , ^{369}Ag , ^{371}Ag , ^{373}Ag , ^{375}Ag , ^{377}Ag , ^{379}Ag , ^{381}Ag , ^{383}Ag , ^{385}Ag , ^{387}Ag , ^{389}Ag , ^{391}Ag , ^{393}Ag , ^{395}Ag , ^{397}Ag , ^{399}Ag , ^{401}Ag , ^{403}Ag , ^{405}Ag , ^{407}Ag , ^{409}Ag , ^{411}Ag , ^{413}Ag , ^{415}Ag , ^{417}Ag , ^{419}Ag , ^{421}Ag , ^{423}Ag , ^{425}Ag , ^{427}Ag , ^{429}Ag , ^{431}Ag , ^{433}Ag , ^{435}Ag , ^{437}Ag , ^{439}Ag , ^{441}Ag , ^{443}Ag , ^{445}Ag , ^{447}Ag , ^{449}Ag , ^{451}Ag , ^{453}Ag , ^{455}Ag , ^{457}Ag , ^{459}Ag , ^{461}Ag , ^{463}Ag , ^{465}Ag , ^{467}Ag , ^{469}Ag , ^{471}Ag , ^{473}Ag , ^{475}Ag , ^{477}Ag , ^{479}Ag , ^{481}Ag , ^{483}Ag , ^{485}Ag , ^{487}Ag , ^{489}Ag , ^{491}Ag , ^{493}Ag , ^{495}Ag , ^{497}Ag , ^{499}Ag , ^{501}Ag , ^{503}Ag , ^{505}Ag , ^{507}Ag , ^{509}Ag , ^{511}Ag , ^{513}Ag , ^{515}Ag , ^{517}Ag , ^{519}Ag , ^{521}Ag , ^{523}Ag , ^{525}Ag , ^{527}Ag , ^{529}Ag , ^{531}Ag , ^{533}Ag , ^{535}Ag , ^{537}Ag , ^{539}Ag , ^{541}Ag , ^{543}Ag , ^{545}Ag , ^{547}Ag , ^{549}Ag , ^{551}Ag , ^{553}Ag , ^{555}Ag , ^{557}Ag , ^{559}Ag , ^{561}Ag , ^{563}Ag , ^{565}Ag , ^{567}Ag , ^{569}Ag , ^{571}Ag , ^{573}Ag , ^{575}Ag , ^{577}Ag , ^{579}Ag , ^{581}Ag , ^{583}Ag , ^{585}Ag , ^{587}Ag , ^{589}Ag , ^{591}Ag , ^{593}Ag , ^{595}Ag , ^{597}Ag , ^{599}Ag , ^{601}Ag , ^{603}Ag , ^{605}Ag , ^{607}Ag , ^{609}Ag , ^{611}Ag , $^{613}\$

Abb. 2.2: Experimenteller Verlauf der magnetischen Momente stabiler Kerne mit ungeradem Proton (oben) und ungeradem Neutron (unten) im Grundzustand. Die durchgezogene Linie gibt die Schmidt-Werte an, gestrichelt sind die sogenannten Dirac-Linien eingezeichnet die man erhält, wenn man für 95 die Dirac-Werte einsetzt (nach [MAY 84], Werte von [LED 78])

$$g_L(p) = 1$$

$$g_L(n) = 0$$

Dirac - elmélet:

$$g_S(p) = 2$$

$$g_S(n) = 0$$

Kísérleti adatok:

$$g_S(p) = 5.59$$

$$g_S(n) = -3.83$$

Mag: ha az impulzusnyomaték és a mágneses nyomaték egyetlen („világító”) nukleontól származnak (ps.-ptl. és ptl.-ps. magok), akkor

$$\hat{\underline{\mu}} = \underbrace{g_L \hat{\underline{L}}}_{\hat{\underline{\mu}}_L} + \underbrace{g_S \hat{\underline{S}}}_{\hat{\underline{\mu}}_S}$$

$$\hat{\underline{I}} = \hat{\underline{L}} + \hat{\underline{S}} \quad (S = 1/2)$$

Általánosított Landé - formula:

$$g = \frac{1}{2I(I+1)} \left\{ [I(I+1) + L(L+1) - S(S+1)] g_L + \right. \\ \left. + [I(I+1) + S(S+1) - L(L+1)] g_S \right\}$$

$$S = 1/2$$

$$I = L \pm 1/2$$

g - faktor egyrésztreske - modellben (Schmidt - görbék):

$$g = g_L \pm \frac{g_S - g_L}{2L+1}$$

$$(I = L \pm 1/2)$$

Atommagok elektromágneses bomlása

$$\begin{array}{ccc}
 \text{-----} & I_i \ M_i \ \pi_i & E_i = E_f + \hbar \omega \\
 \text{ } & \text{ } & \text{ } \\
 \text{ } & \hbar \omega & \text{ } \\
 \text{ } & \text{ } & \text{ } \\
 \text{-----} & I_f \ M_f \ \pi_f & \underline{I}_i = \underline{I}_f + \underline{L} \\
 \text{ } & \text{ } & \pi_i = \pi_f \cdot \pi
 \end{array}$$

Keressük a Maxwell-egyenletek adott impulzusmomentákhoz és adott paritáshoz tartozó megoldásait (multipól-sugárzás).

Forrásmentes térben:

$$\underline{\nabla} \times \underline{E} = - \frac{\partial \underline{B}}{\partial t}$$

$$\underline{\nabla} \times \underline{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \underline{E}}{\partial t}$$

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{E} = 0$$

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{B} = 0$$



$$\begin{array}{l}
 \underline{B}_e^m(\underline{r}, t) = f_e(kr) \underline{L} Y_e^m(\theta, \phi) e^{i\omega t} \\
 \underline{E}_e^m(\underline{r}, t) = i \frac{c}{k} \underline{\nabla} \times \underline{B}_e^m(\underline{r}, t)
 \end{array}
 \left\{ \begin{array}{l} \pi = (-1)^l \\ \text{(E) elektromos} \\ 2^l\text{-pólus-sugárzás} \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l}
 \underline{E}_e^m(\underline{r}, t) = f_e(kr) \underline{L} Y_e^m(\theta, \phi) e^{i\omega t} \\
 \underline{B}_e^m(\underline{r}, t) = -i \frac{1}{kc} \underline{\nabla} \times \underline{E}_e^m(\underline{r}, t)
 \end{array}
 \left\{ \begin{array}{l} \pi = (-1)^{l+1} \\ \text{(M) mágneses} \\ 2^l\text{-pólus-sugárzás} \end{array} \right.$$

Impulzusmomenták: $\sqrt{l(l+1)} \hbar$
z-komponens: $m \hbar$

$$\omega = kc$$

$$\underline{L} = i(\underline{r} \times \underline{\nabla})$$

$f_e(kr)$: szférikus Bessel-függvény

Vektor-gömbfüggvények:

$$\underline{X}_e^m(\theta, \phi) = \frac{1}{\sqrt{l(l+1)}} \underline{L} Y_e^m(\theta, \phi)$$

Kiválasztási szabály az impulzusmomentákra (háromszög-egyenletrendszer):

$$l = I_i + I_f, \ I_i + I_f - 1, \dots, |I_i - I_f|$$

$$E_e = E_\gamma \left[1 - \frac{1}{1 + \frac{E_\gamma}{m_e c^2} (1 - \cos \theta)} \right]$$

A meglökött elektron

minimális energiája: $E_e^{\min} = 0$ ($\theta = 0$)

maximális energiája:

$$E_e^{\max} = E_\gamma \frac{1}{1 + \frac{m_e c^2}{2 E_\gamma}}$$

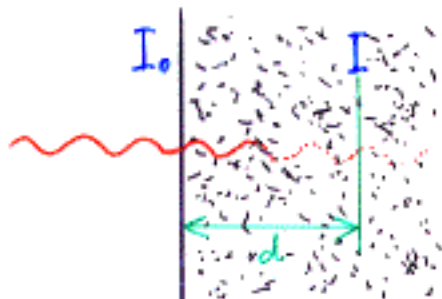
A Compton-elektronok energiaeloszlása

Hatáskeresztmetszet:

$$\sigma_c \sim E_\gamma^{-1} Z$$

Közepes (100 keV... 1 MeV) energián és alacsony rendszámnál jelentős.

Abszorpciós együttható



$$I = I_0 e^{-\mu/d}$$

Szögeloszlás

Energia-áramsűrűség (Poynting-vektor):

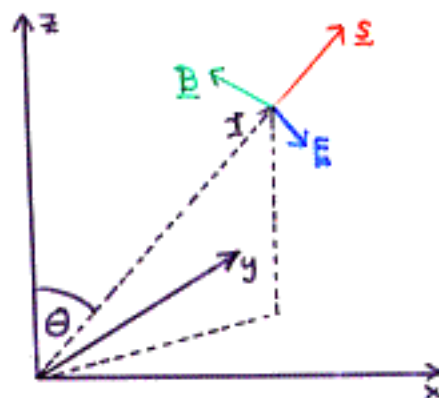
$$\underline{S} = \frac{1}{\mu_0} (\underline{E} \times \underline{B})$$

A hullámszónában:

$$\epsilon_0 |\underline{E}|^2 = \frac{1}{\mu_0} |\underline{B}|^2$$



$$|\underline{E}| = c |\underline{B}|$$



$$|\underline{S}| = c \epsilon_0 |\underline{E}|^2 = \frac{c}{\mu_0} |\underline{B}|^2$$

Mℓ-sugárzásra: $|\underline{S}| = c \epsilon_0 |\underline{E}|^2 \sim |\sum_l Y_l^m(\theta, \phi)|^2$

Eℓ-sugárzásra: $|\underline{S}| = \frac{c}{\mu_0} |\underline{B}|^2 \sim |\sum_l Y_l^m(\theta, \phi)|^2$

Normált szögeloszlás:

$$F_{\ell m}(\theta) = \frac{|\sum_l Y_l^m(\theta, \phi)|^2}{\sum_m |\sum_l Y_l^m(\theta, \phi)|^2}$$

Tulajdonságok:

a) $\sum_m F_{\ell m}(\theta) = 1$

izotrópia az m-összegre

b) $F_{\ell m}(\theta) = F_{\ell -m}(\theta)$

szimmetria m-ben

c) $F_{\ell m}(\theta) = F_{\ell m}(\pi - \theta)$

tükörszimmetria az x-y síkra

d) $F_{\ell m}(0) = 0$, ha $m \neq \pm 1$

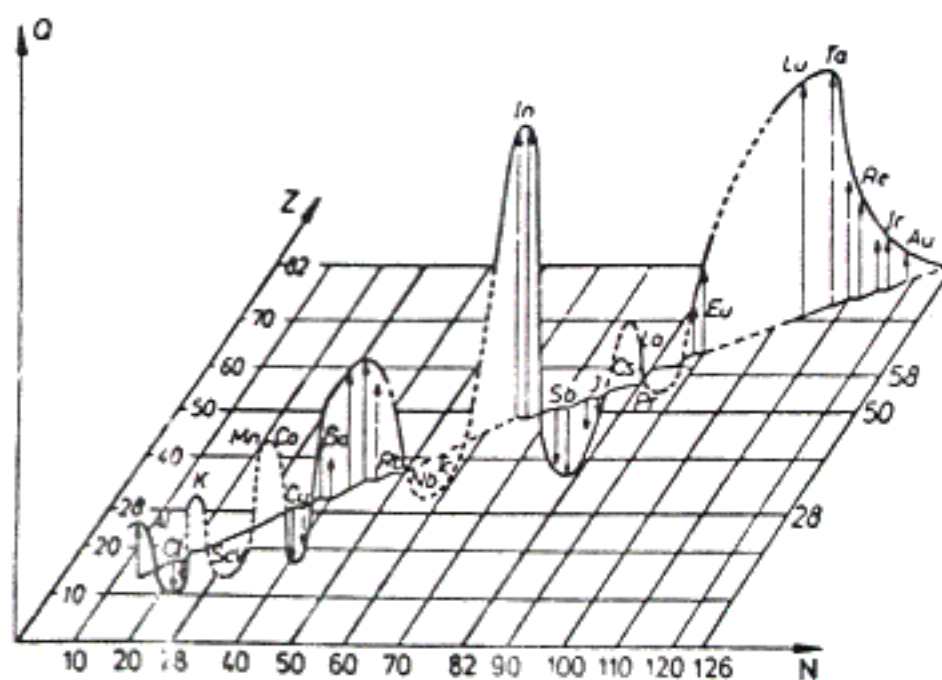
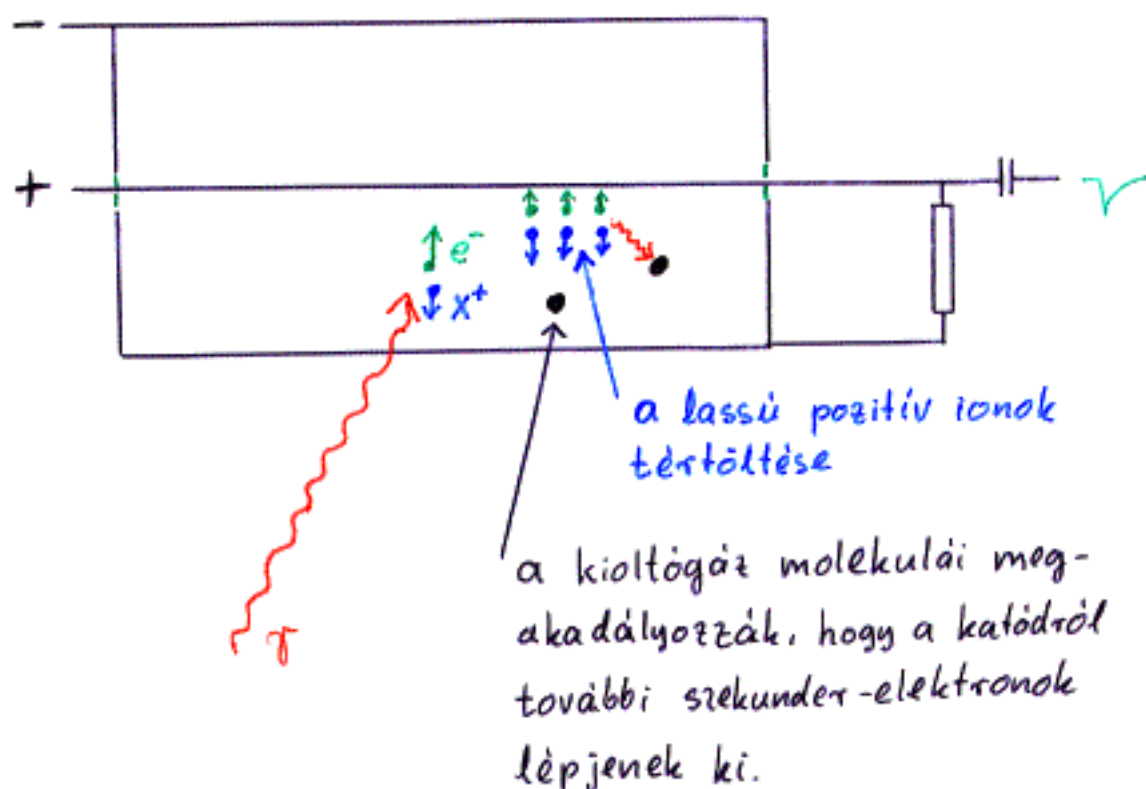


Abb. 2.3: Beobachtete Werte des Quadrupolmoments Q als Funktion der Kernladungszahl Z und der Neutronenzahl N . (Alle Werte bis zum In sind mit dem Faktor 10 multipliziert. Aus (KOP 56))

Tab. 2.1: Multipolordnungen bei γ -Übergängen

Drehimpuls- änderung ΔI		0 kein $0 \rightarrow 0$	1	2	3
Paritäts- wechsel	ja	E1 (M2)	E1 (M2)	M2 E3	E3 (M4)
	nein	M1 E2	M1 E2	E2 (M3)	M3 E4

Proporcionális számláló



Gázerősítés: $10^2 \dots 10^4$

Csak alacsony energiájú gamma-sugárzás ($\sim 10 \text{ keV}$) detektálására alkalmas. Kivétel: abszorpciós él (pl. Kr a 14.4 keV -os fotonokra). Ilyenkor viszont kiszökési csúcs is megjelenik.

Energiafelbontása jó ($\sim 10\%$), időfelbontása nagyon rossz ($\sim 1 \mu\text{s}$).

Az atommag elektromos tulajdonságai

Átlagos négyzetes magsugár

$$\langle r^2 \rangle := \langle I, M | r^2 | I, M \rangle$$

$$\begin{aligned} \langle r^2 \rangle &= (-1)^{I-M} \underbrace{\begin{pmatrix} I & 0 & I \\ -M & 0 & M \end{pmatrix}}_{= \begin{pmatrix} I & I & 0 \\ M & -M & 0 \end{pmatrix}} \langle I || r^2 || I \rangle = \frac{\langle I || r^2 || I \rangle}{\sqrt{2I-1}} \\ &= (-1)^{I-M} \frac{1}{\sqrt{2I-1}} \quad \downarrow \\ &\quad \text{M-től független (trivialis)} \end{aligned}$$

↑
0-adrendű szférikus tenzor

Töltéssűrűség: $\rho(r)$

$$\langle r^2 \rangle = \frac{1}{Ze} \int r^2 \rho(r) d^3r$$

Közelítés: a mag homogén töltött gömb:

$$\rho = \frac{3Ze}{4\pi R^3}$$

↑ magsugár

$$\langle r^2 \rangle = \frac{3}{5} R^2$$

R a magállapottól függ: alapállapotban R_a , gerjesztett állapotban R_g

$$\langle r^2 \rangle_g - \langle r^2 \rangle_a = \frac{3}{5} (R_g^2 - R_a^2) = \frac{6}{5} R^2 \frac{\delta R}{R}$$

ahol

$$R = \frac{R_a + R_g}{2} \quad \text{és} \quad \delta R = R_g - R_a$$

$$\delta R / R \approx 10^{-4}$$

$^{119}\text{Sn}, ^{151}\text{Eu}$:

$$\delta R > 0$$

^{57}Fe :

$$\delta R < 0$$

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0, \text{ ha } j_1 + j_2 + j_3 = \text{páratlan}$$

Ha $j_1 + j_2 + j_3 = 2p = \text{páros}$, akkor

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (-1)^p \sqrt{\frac{(2p-2j_1)!(2p-2j_2)!(2p-2j_3)!}{(2p+1)!}} \times$$

$$\times \frac{p!}{(p-j_1)!(p-j_2)!(p-j_3)!}$$

Másodrendű tenzor felbontása

$$T_{ik} = \overset{\text{skalár}}{\downarrow} I_{ik} + \underbrace{\overset{\text{antiszimmetrikus}}{\downarrow} A_{ik} + \overset{\text{szimmetrikus}}{\downarrow} S_{ik}}_{\text{nyom-mentes}}$$

$$I_{ik} = \frac{1}{3} \text{Tr}(T_{ik}) \delta_{ik} \quad \text{skalár (1)}$$

$$A_{ik} = \frac{1}{2} (T_{ik} - T_{ki}) = -A_{ki} \quad \text{vektor (3)}$$

$$S_{ik} = \frac{1}{2} (T_{ik} + T_{ki}) - \frac{1}{3} \text{Tr}(T_{ik}) \delta_{ik} \quad \text{tenzor (5)}$$

Az 1. vektor szférikus komponensei:

$$T_+ = -\frac{1}{\sqrt{2}} (x + iy) = -\frac{1}{\sqrt{2}} r \sin \theta e^{i\phi} = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} r Y_1^1(\theta, \phi)$$

$$T_0 = z = r \cos \theta = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} r Y_1^0(\theta, \phi)$$

$$T_- = \frac{1}{\sqrt{2}} (x - iy) = \frac{1}{\sqrt{2}} r \sin \theta e^{-i\phi} = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} r Y_1^{-1}(\theta, \phi)$$

↑
1. rendű szférikus tenzor

$T(l, m)$ l -ed rendű szférikus tenzor, ha $T(l, m)$ elemei forgásoknál úgy transzformálódnak, mint az $Y_l^m(\theta, \phi)$ gömbfüggvények.

$$T(l, m) = \sum_{\substack{m_1, m_2 \\ m_1 + m_2 = m}} (l_1, l_2, m_1, m_2 | l, m) T_1(l_1, m_1) T_2(l_2, m_2)$$

Skalárszorzat:

$$T(0, 0) = \sum_{m_1 + m_2 = 0} (1, 1, m_1, m_2 | 0, 0) T_1(1, m_1) T_2(1, m_2)$$

Vektorszorzat:

$$T(1, m) = \sum_{m_1 + m_2 = m} (1, 1, m_1, m_2 | 1, m) T_1(1, m_1) T_2(1, m_2)$$

Tenzorszorzat:

$$T(2, m) = \sum_{m_1 + m_2 = m} (1, 1, m_1, m_2 | 2, m) T_1(1, m_1) T_2(1, m_2)$$

Wigner - Eckart - tétel

$\hat{T}(l, m)$: l -ed rendű szférikus tenzoroperátor

$\hat{T}(l, m)$ mátrixelemei:

$$\langle I', M' | \hat{T}(l, m) | I, M \rangle = \underbrace{(-1)^{I'-M'} \begin{pmatrix} I' & l & I \\ -M' & m & M \end{pmatrix}}_{C(I', l, I; -M', m, M)} \underbrace{\langle I' || T(l) || I \rangle}_{\text{redukált mátrixelem}}$$

redukált mátrixelem
nem függ M, M' -től!

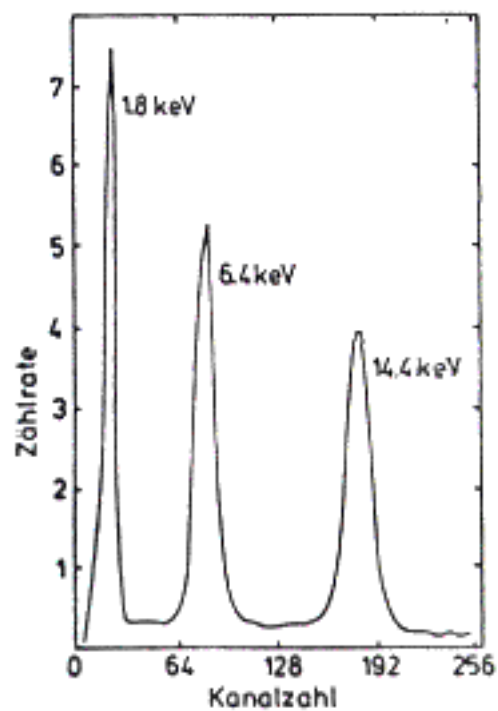


Abb. 4.14:

Impulshöhenspektrum einer ^{57}Co Mößbauer-Quelle aufgenommen mit einem Proportionalzählrohr, dessen Zählgas aus 97 % Krypton und 3 % CO_2 besteht

Elektromos kvadrupólus-nyomaték

Kvantummechanikai kvadrupólus-nyomaték-tenzor:

$$\hat{Q}_{2m} := \sqrt{\frac{16\pi}{5}} r^2 Y_2^m(\theta, \phi)$$

(másodrendű szférikus tenzoroperátor)

Várható értéke az $|I, M\rangle$ állapotban:

$$\langle I, M | \hat{Q}_{2m} | I, M \rangle = (-1)^{I-M} \underbrace{\begin{pmatrix} I & 2 & I \\ -M & m & M \end{pmatrix}}_{0, \text{ ha } I < 1, \text{ vagyis } I=0 \text{ és } I=1/2 \text{ esetén}} \langle I || Q_2 || I \rangle$$

Klasszikus kvadrupólus-nyomaték:

$$Q = \frac{1}{e} \sqrt{\frac{16\pi}{5}} \int r^2 Y_2^0 g(r) d^3r$$

Kvantummechanikában:

$$Q := \langle I, I | \hat{Q}_{20} | I, I \rangle = \begin{pmatrix} I & 2 & I \\ -I & 0 & I \end{pmatrix} \langle I || Q_2 || I \rangle$$

Q -val a többi komponens várható értéke is kifejezhető, a mag bármely állapotában:

$$\langle I, M | \hat{Q}_{2m} | I, M \rangle = (-1)^{I-M} \frac{\begin{pmatrix} I & 2 & I \\ -M & m & M \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} I & 2 & I \\ -I & 0 & I \end{pmatrix}} Q$$

0, ha $-M+m+M \neq 0$,
vagyis ha $m \neq 0$

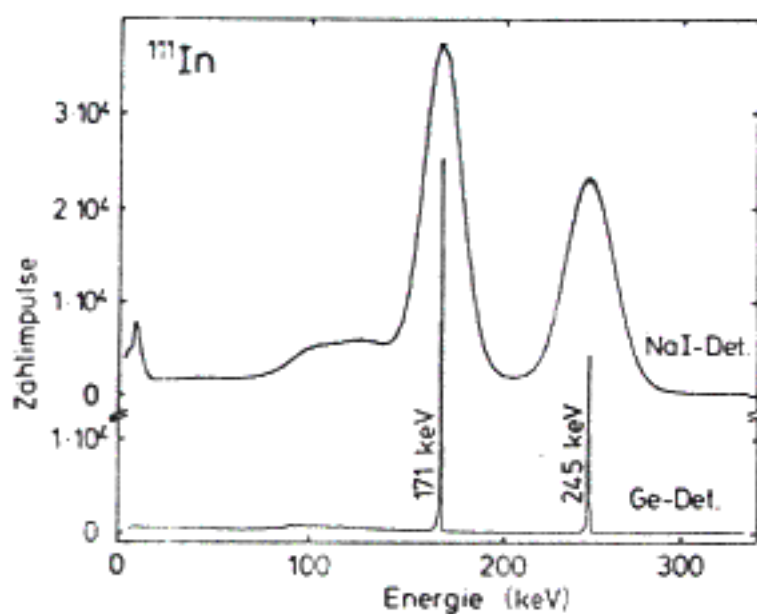


Abb. 2.11: Energiespektrum einer ^{111}In Quelle aufgenommen mit einem NaI(Tl)- (oben) und einem i-Ge-Detektor (unten)

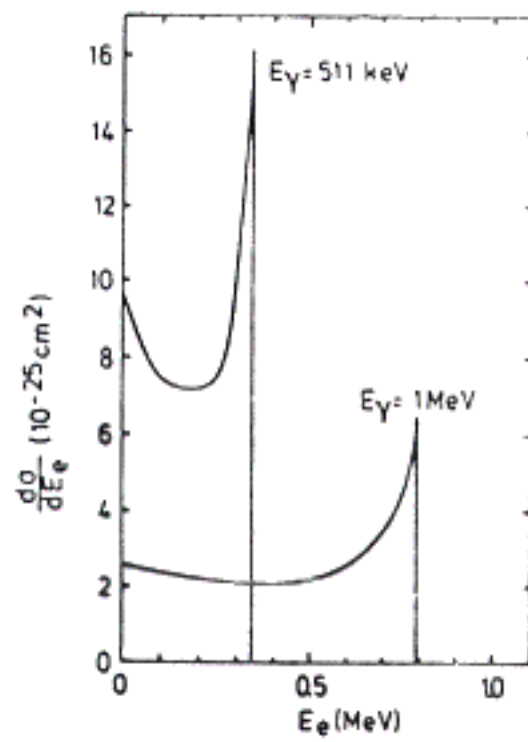


Abb. 2.8:
Energieverteilung der Compton-Elektronen für zwei verschiedene γ -Energien

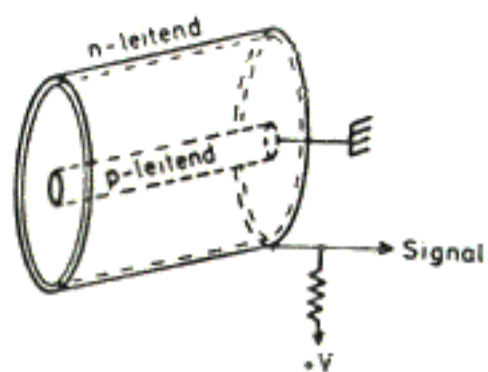
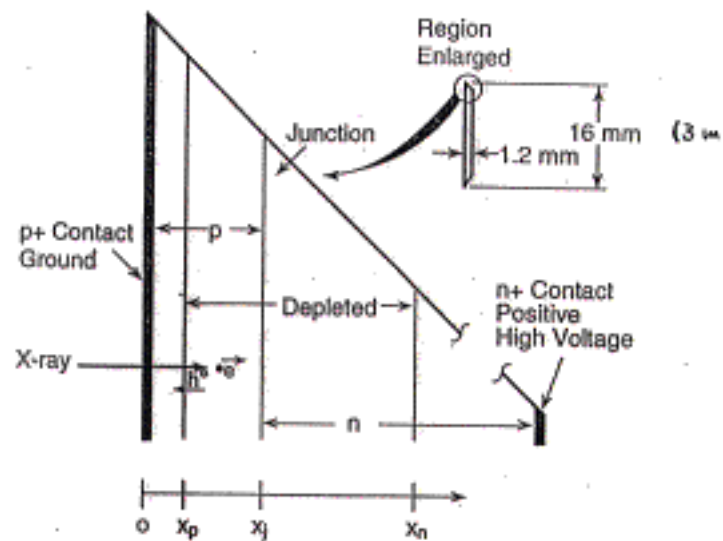
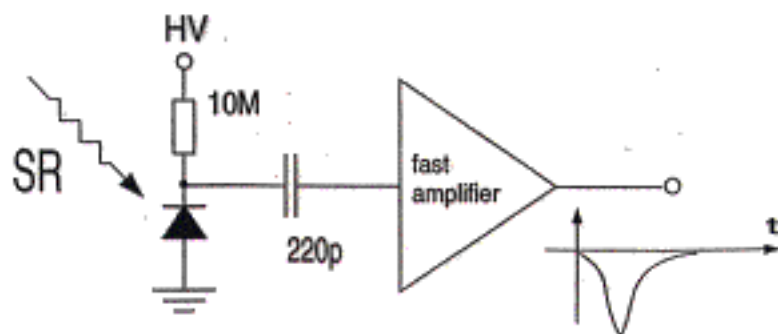


Abb. 2.12:
Aufbau eines Ge(Li)-Detektors

APD: Avelanche Photo Diode



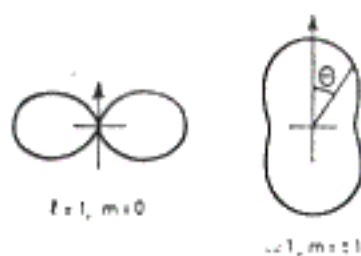
APD operational setup:



Tab. 2.2: Winkelverteilungsfunktionen $F_{\ell m}(\vartheta)$ für Dipol- und Quadrupolstrahlung

	$m = 0$	$m = \pm 1$	$m = \pm 2$
$\ell = 1$ (Dipol)	$\frac{1}{2} \sin^2 \vartheta$	$\frac{1}{4} (1 + \cos^2 \vartheta)$	---
$\ell = 2$ (Quadrupol)	$\frac{3}{2} \sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta$	$\frac{1}{4} (1 - 3 \cos^2 \vartheta + 4 \cos^4 \vartheta)$	$\frac{1}{4} (1 - \cos^4 \vartheta)$

Dipol



Quadrupol

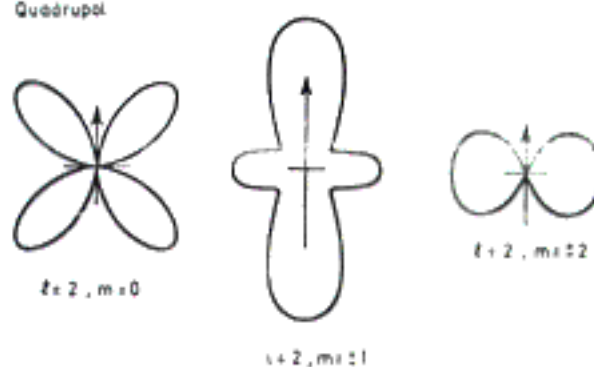
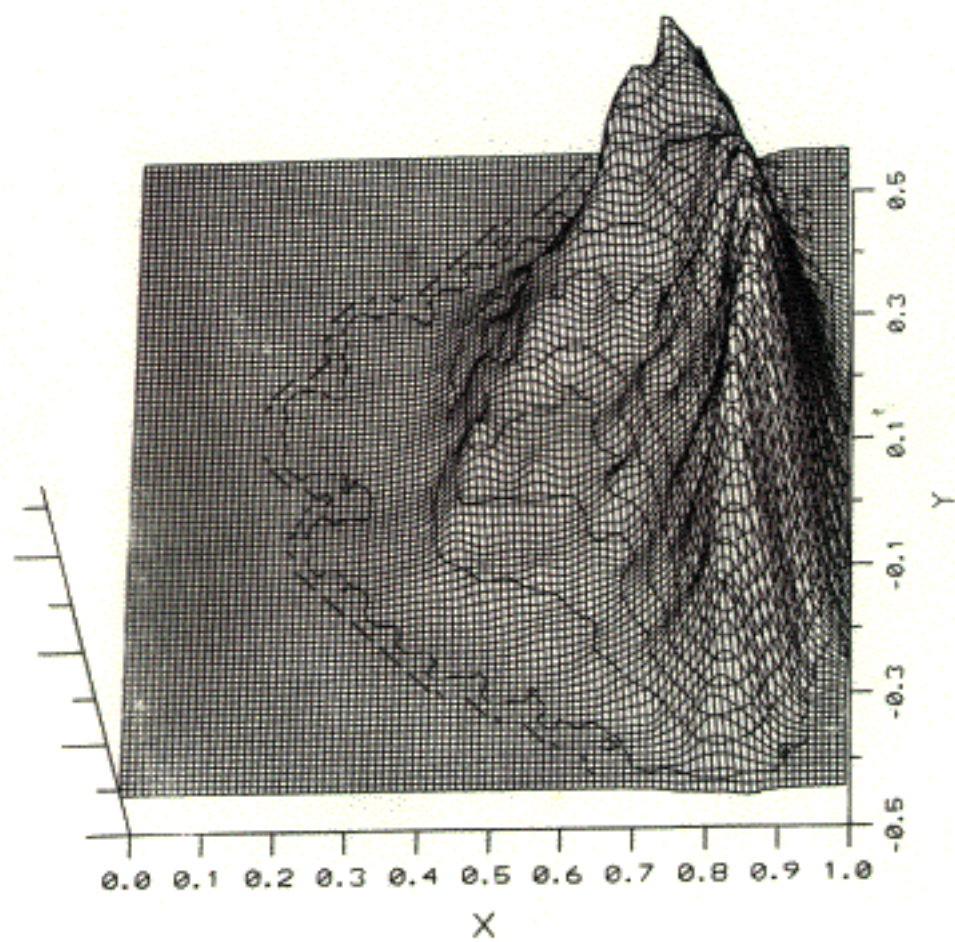
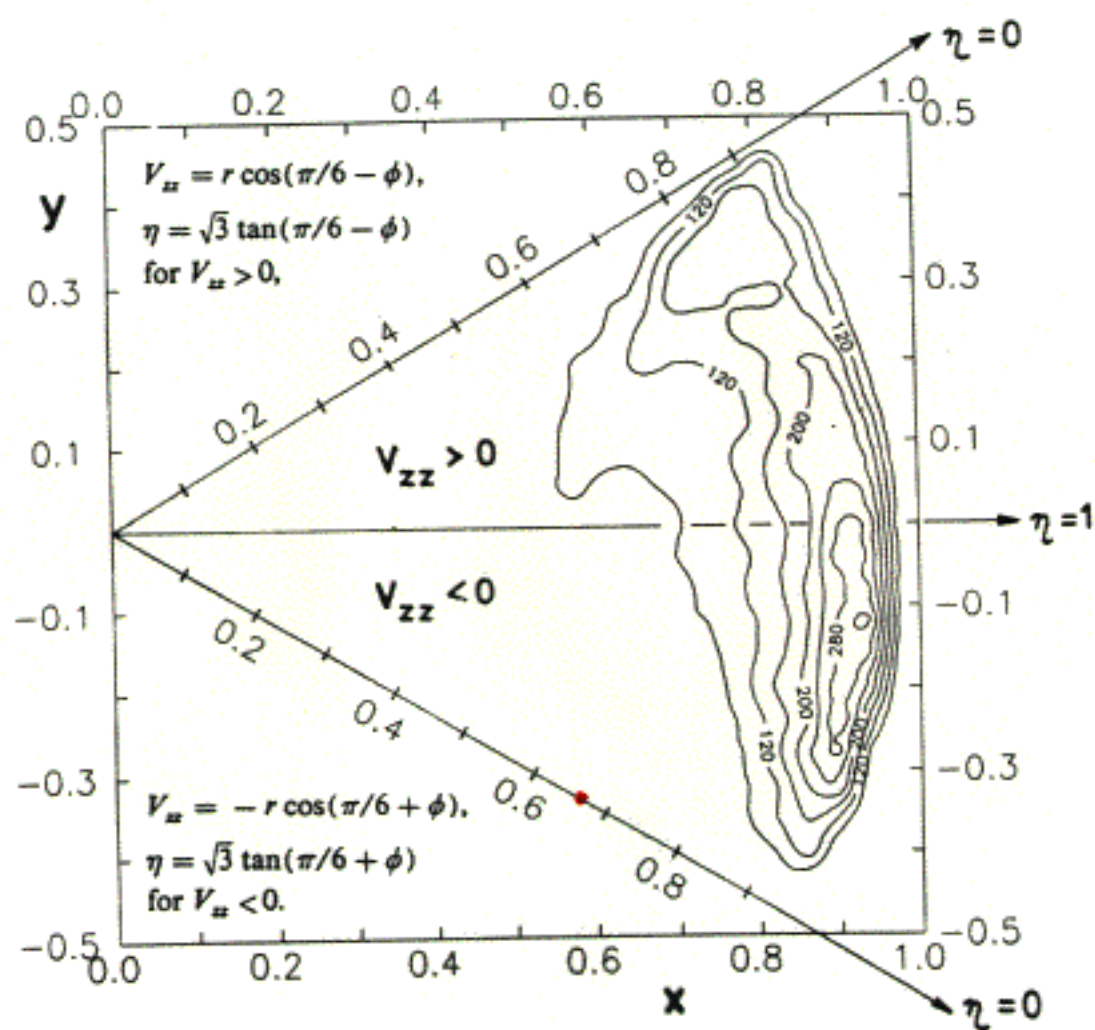
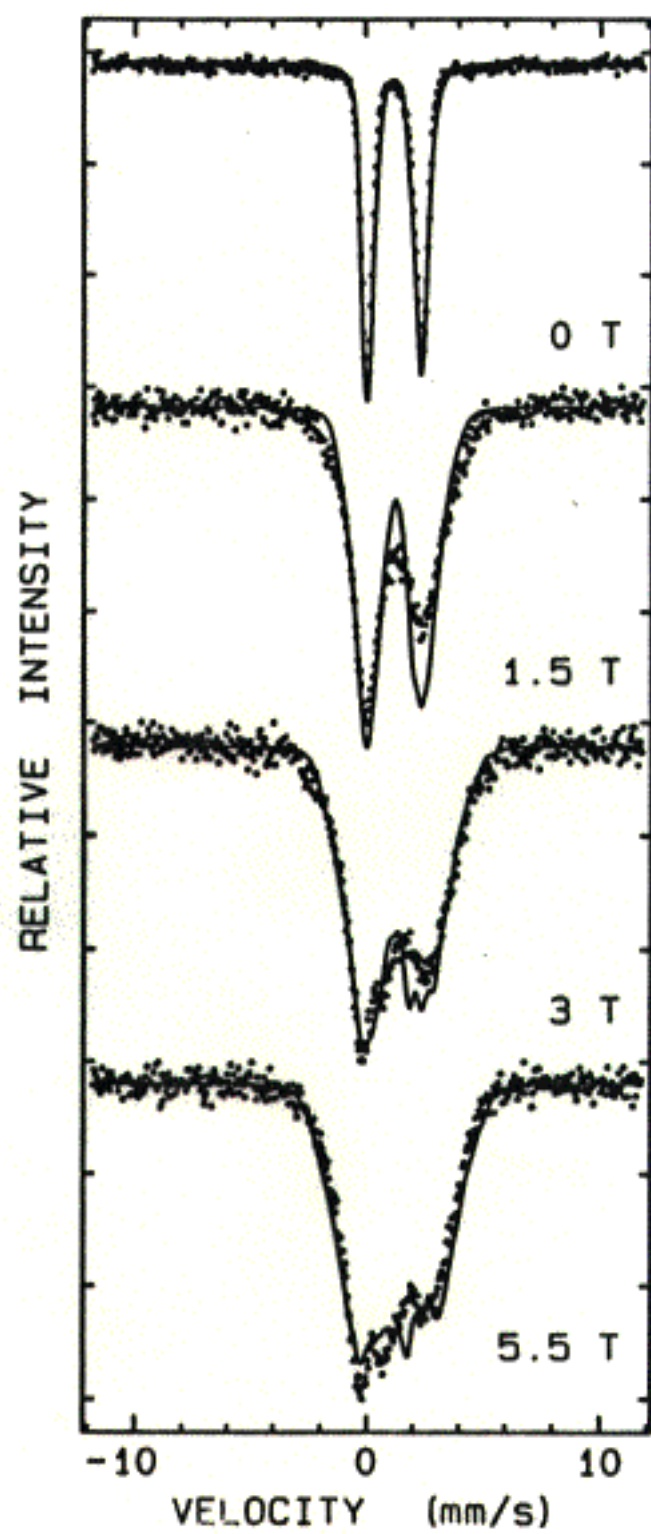
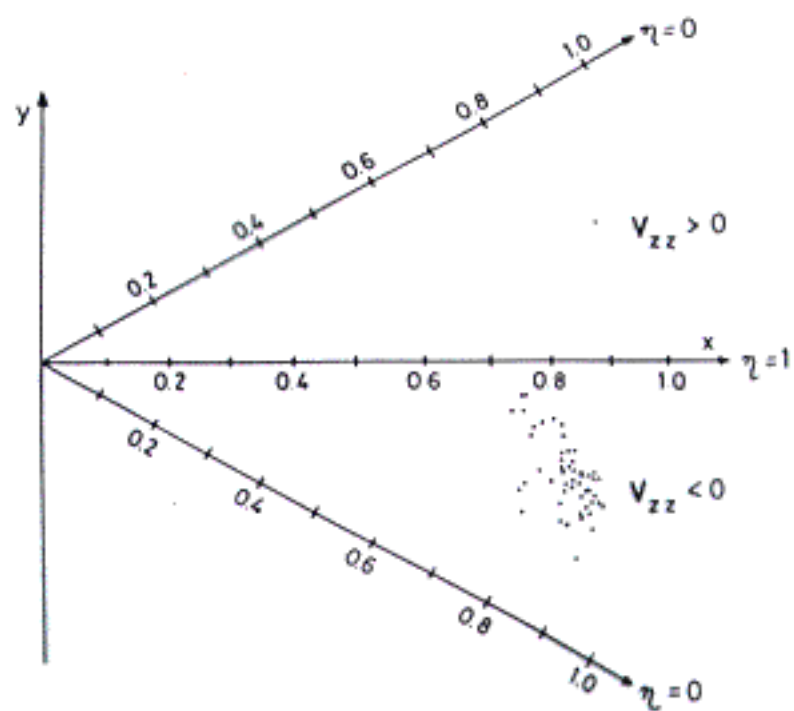


Abb. 2.6: Ausstrahlcharakteristik für reine Dipol- und Quadrupolstrahlung

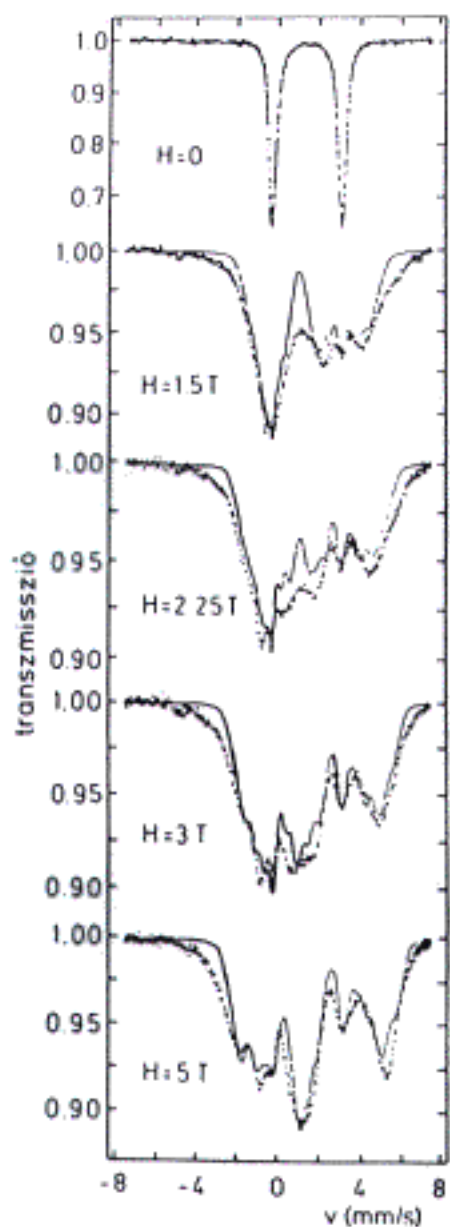








3.3 ábra: Az $\text{Fe}(\text{ClO}_4)_3$ lefagyasztott vizes oldata elektromos térgradiensének eloszlása egy "Csízek-ábrán" [59].



3.2 ábra: $\text{Fe}(\text{ClO}_4)_2$ eutektikus koncentrációjú lefagyasztott vízes oldatnak Mössbauer-spektrumai 4.2 K-en, különböző longitudinális mágneses terekben. A folyvamos görbék a C_{2v} - τ modellben számított spektrumok ($L_{\tau}\xi_0=950 \text{ cm}^{-1}$, $L_{\tau}\xi_0=0$, $L_{\tau}\sigma_{\tau}=150 \text{ cm}^{-1}$).

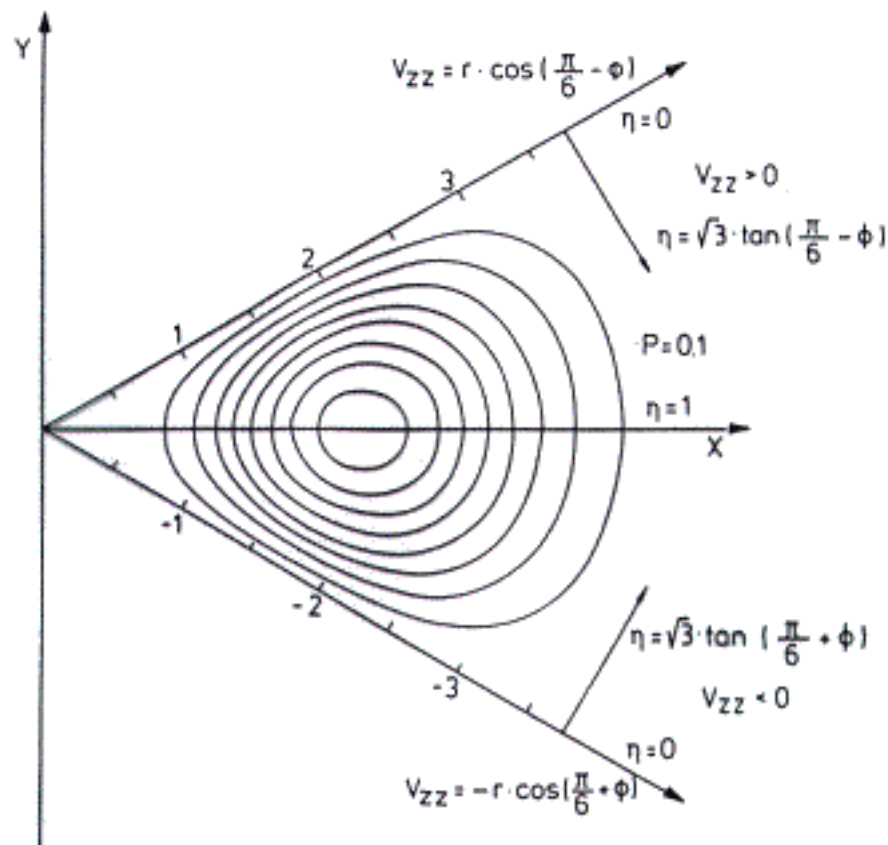


Fig.3. Same as fig.1. Presentation as specified in the text and in table 1.

Tenzorinvariánsok:

$$S = \frac{2}{3} \sum_{\alpha\beta} V_{\alpha\beta}^2 = V_{zz}^2 \left(1 + \frac{1}{3} \eta^2\right) = \tau^2$$

$$D = 4 \det(V_{\alpha\beta}) = V_{zz}^3 (1 - \eta^2) = \tau^3 \sin(3\varphi)$$

Az $1/2 \rightarrow 3/2$ kvadrupólus-felhasadás $\sim \tau$

Table 1

Expressions for the parameters V_{zz}, η in terms of cartesian coordinates (x, y) and of polar coordinates (r, ϕ) in the presentation of the (V_{zz}, η) -plane shown in fig.3.

$V_{zz} < 0$	$V_{zz} > 0$
$V_{zz} = -\frac{1}{2}(\sqrt{3}x - y)$ $= -r \cos\left(\frac{1}{6}\pi + \phi\right)$	$V_{zz} = \frac{1}{2}(\sqrt{3}x + y)$ $= r \cos\left(\frac{1}{6}\pi - \phi\right)$
$\eta = \sqrt{3}(x + \sqrt{3}y) / (\sqrt{3}x - y)$ $= \sqrt{3} \tan\left(\frac{1}{6}\pi + \phi\right)$	$\eta = \sqrt{3}(x - \sqrt{3}y) / (\sqrt{3}x + y)$ $= \sqrt{3} \tan\left(\frac{1}{6}\pi - \phi\right)$

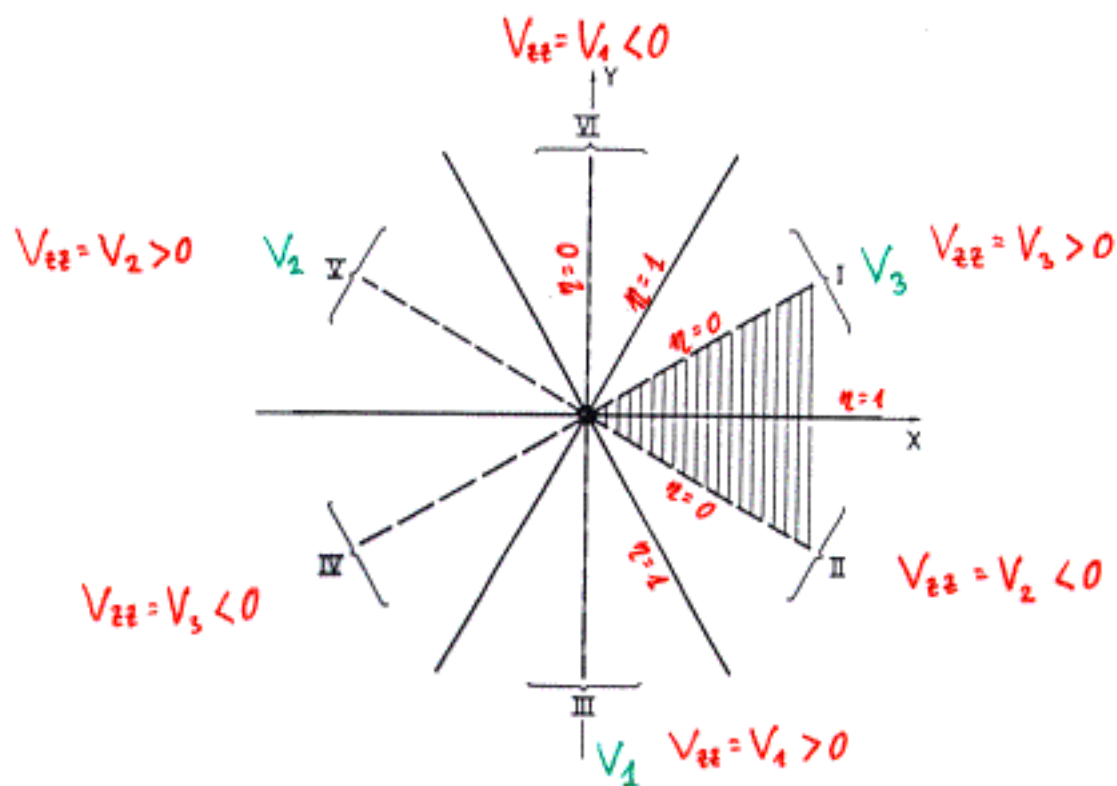


Fig.2. General view of the plane $V_1 + V_2 + V_3 = 0$ in the (V_1, V_2, V_3) -parameter space. Heavy lines correspond to $\eta = 1$ ($V_1 = 0$), dashed lines correspond to $\eta = 0$. See text for the meaning of sectors I through VI. The hatched sector contains all physical parameter values $-\infty < V_{zz} < \infty$, $0 \leq \eta \leq 1$.

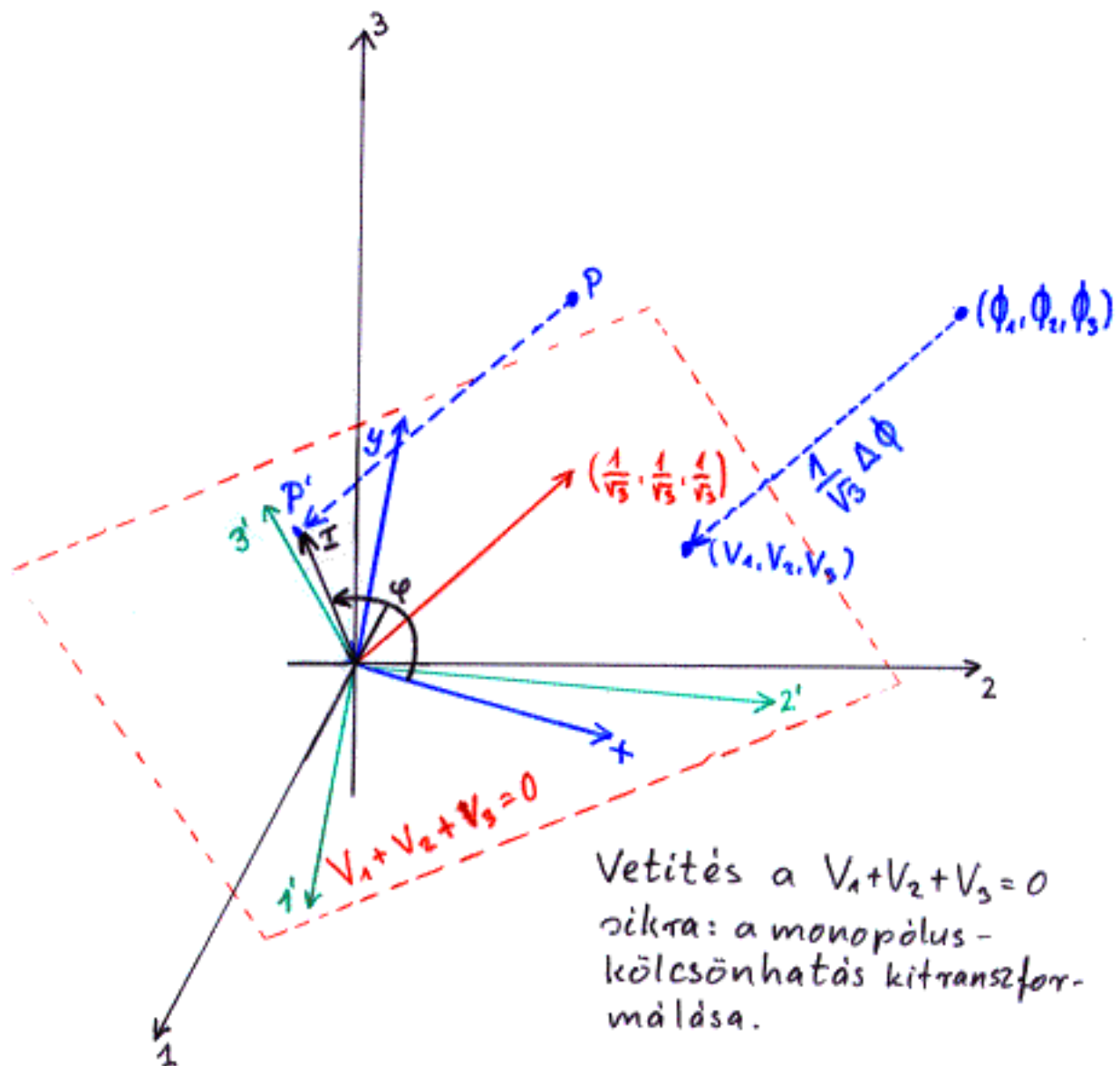
$$V_1 = -y$$

$$V_2 = -\frac{1}{2}(\sqrt{3}x - y)$$

$$V_3 = \frac{1}{2}(\sqrt{3}x + y)$$

Egy alkalmasan választott 60° -os vektorban valamennyi, egymástól fizikailag lényegesen különböző esetet megtaláljuk.

Az 1, 2, 3 tengelyek egyenértékűek



A sík egy P' pontját az (x, y) derékszögű vagy az (r, φ) polárkoordinátákkal jellemezzük.

Hogyan jellemezzük az ETG-tenzor eloszlását pl.

- rendezetlen kristályban,
- fémüvegben,
- amorf oxidban,
- lefagyasztott oldatban,
- stb. ?

Fizikailag nem értelmezhető eloszlások:

$$P(V_{zz})$$

$$P(V_{zz} \sqrt{1 + \frac{\eta^2}{3}})$$

(kvadrupólus-felhasadás
 $1/2 \rightarrow 3/2$ átmenet esetén)

$$P(V_{zz}, \eta)$$

A gyakorlatban szinte mindenki ezeket használja.

A megoldás (G. Czjzek, 1983): a (V_1, V_2, V_3) -teret a $V_1 + V_2 + V_3 = 0$ síkra kell vetíteni.

$\eta = 1$ esetén V_{zz} előjelének nincs értelme; ez a (V_{zz}, η) térben nem látnék.

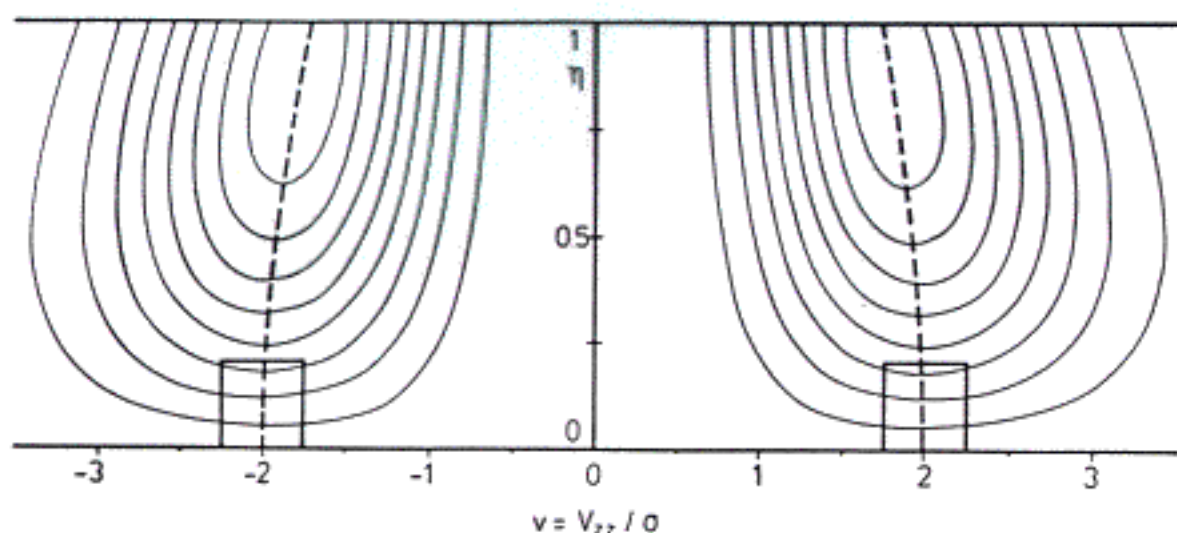


Fig.1. Contour map of the probability density, $P(v, \eta)$, eq.(5), with $\beta = 0$, $v = V_{zz}/\sigma$, corresponding to a randomly packed structure in conventional presentation. Intervals between contour lines: $\delta P = 0.05$. $P = 0$ along the lines $v = 0$ and $\eta = 0$. The dashed line marks the ridge of $P(v, \eta)$ formed by the points (v, η) with $v = 2(1 + \frac{1}{2}\eta^2)^{-1/2}$. At these points $|\partial P / \partial v|_{\eta=\text{const}} = 0$. The squares indicate schematically results reported in ref.[4] for some amorphous Eu alloys.

V_1, V_2, V_3 közül az egyiktől szabadulni akarunk. De ezért feldőezzük a szimmetriát!

A két független paraméter:

$$\begin{array}{c} V_{zz} \\ \eta = \frac{V_{xx} - V_{yy}}{V_{zz}} \end{array}$$

A tengelyek választása:

- $|V_{zz}| \geq |V_{yy}| \geq |V_{xx}|$
- (x, y, z) jobbsodrású

$$V_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}(1-\eta) & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}(1+\eta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} V_{zz}$$

Következmény: a (V_1, V_2, V_3) -tér leképezése a (V_{zz}, η) -síkra **nem folytonos!** A (V_1, V_2, V_3) -térben egymáshoz közeli pontok a (V_{zz}, η) -síkon távol kerülhetnek egymástól, ugyanakkor a (V_{zz}, η) -sík két látszólag közeli pontja a (V_1, V_2, V_3) -térben két távoli pont lehet. \Rightarrow A (V_{zz}, η) -sík nem alkalmas az ETG-tenzor eloszlásának leírására.

$\phi_{\alpha\beta}$ szimmetrikus (Young-tétel)



$V_{\alpha\beta}$ szimmetrikus



$V_{\alpha\beta}$ diagonalizálható

$V_{\alpha\beta}$ főtengety-rendszerében:

$$E_Q = \frac{e}{6} \sum_{\alpha} V_{\alpha\alpha} Q_{\alpha\alpha}$$

$$V_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} V_1 & 0 & 0 \\ 0 & V_2 & 0 \\ 0 & 0 & V_3 \end{pmatrix}$$

$$V_1 + V_2 + V_3 = 0$$

Eddig a kifejezések a koordinátákban szimmetrikusak voltak. **Most rontjuk el!**

Az ETG-tenzor Cezek-féle ábrázolása

A $g(\underline{r})$ töltéseloszlású magra ható elektrosztatikus potenciál: $\phi(\underline{r})$

Az elektrosztatikus kölcsönhatási energia:

$$\begin{aligned} E_e &= \int g(\underline{r}) \phi(\underline{r}) d^3\underline{r} = \\ &= \underbrace{\phi(0) \int g(\underline{r}) d^3\underline{r}}_{Ze} + \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} \phi_{\alpha\beta}(0) \int g(\underline{r}) x_\alpha x_\beta d^3\underline{r} + \dots \end{aligned}$$

$$\text{ETG: } V_{\alpha\beta}(\underline{r}) := \phi_{\alpha\beta}(\underline{r}) - \frac{1}{3} \underbrace{\left(\sum_{\gamma} \phi_{\gamma\gamma}(\underline{r}) \right)}_{\Delta\phi(\underline{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0} \sigma(\underline{r})} \delta_{\alpha\beta}$$

$$\begin{aligned} E_e &= \phi(0) Ze - \frac{1}{6\epsilon_0} \sigma(0) \int r^2 g(\underline{r}) d^3\underline{r} + E_0 \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} V_{\alpha\beta}(0) \underbrace{\int g(\underline{r}) \left(x_\alpha x_\beta - \frac{r^2}{3} \delta_{\alpha\beta} \right) d^3\underline{r}}_{\frac{e}{3} Q_{\alpha\beta}} + E_Q \end{aligned}$$

A mag kvadrupólusnyomaték-tenzora:

$$Q_{\alpha\beta} := \frac{1}{e} \int g(\underline{r}) (3x_\alpha x_\beta - r^2 \delta_{\alpha\beta}) d^3\underline{r}$$