Állandóegyütthatójú differenciálegyenletek és -egyenletrendszerek új megoldási módszerei

Major Márton
V. fizikus hallgató
(*KFKI RMKI–ELTE Atomfizikai TSZ*)

Témavezetők:

Петро Іванович Каленюк
Lviv-i Műszaki Egyetem Alkalmazott Matematikai és Programozás Tanszék,

Horváth Zalán
ELTE Elméleti Fizikai Tanszék

v1.22

1999. április 8.

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Bevezetés

Az állandóegyütthatós differenciálegyenletek látszólag a matematika lezárt területéhez tartoznak. Legalábbis abban az értelemben, hogy egzaktul meg tudjuk őket oldani. Ennek ellenére érdemes velük foglalkozni, mert több cseles eljárás is létezik a megoldások minél egyszerűbb és szélesebb körű megkeresésére.

Az egyik nagy csoportot az integrál-módszerek alkotják. Ide soroljuk pl. a Laplace-transzformációt. Az integrálmódszerek egységesen tárgyalhatók az ún. „operátorszámítás" keretein belül [9]. Ezen megoldási mód alapvető fogalma a konvolució[1]. Ez lehetőséget ad a disztribúciók bevezetésére is, ami nagyban megkönnyíti a szakadásos, Dirac-delta szerű és impulzusgerjesztésű rendszerek vizsgálatát.

Az a módszer azonban, amit jelen dolgozat tárgyal, az exponenciális függvény egy másik, igen figyelemre méltó tulajdonságán alapszik. Azon tudniillik, hogy az analitikus függvények az $\exp\left(\frac{d}{d\lambda}\right)$ differenciáloperátornak sajátfüggvényei. Ami az igazi újdonság, hogy az eredményeket egy határátmenet „idő előtti" elvégzésével kapjuk. Ezek a lépések azonban nem kötődnek semmilyen formában az integrálás fogalmához, azaz a fenti az előzőektől független elmélet[2]. Ebben rejlik talán korlátja is, mert egyelőre igen kevés típusú egyenletrendszer megoldását sikerült vele kidolgozni.

Metodikailag is jelentős az új – differenciáláson és határértékképzésen – alapuló módszercsalád, hiszen már az első egyetemi kurzusokon (még az integrálszámítás bevezetése előtt) alkalmazható. Külön előnye, hogy a probafüggvényes módszert is helyettesíteni tudja (lásd 2.1.3. — 10. oldal).

A módszercsalád Lvivből (Ukrajna) származik. Jelenleg Pjotr Ivanovics Kalenjuk vezetésével dolgozik rajtuk Zinovij Mikolajovics Nyitrebics és Pjotr Lvovics Cohan. Ez a TDK dolgozat megpróbálja összefoglalni mószerük lényegét, bemutatni az általuk kiszámolt példák minél szélesebb skáláját és a szerző által kiszámolt fizikai példák minél szélesebb körét és elhelyezni a többi eljárás (pl. próbafüggvény alkalmazása, Laplace transzformáció, Furier eljárás) között. Az itt összefoglalt módszerek nem oldanak meg eddig megoldatlan egyenleteket, de egy új, és matematikailag roppant elegáns, könnyen formalizálható eszközt adnak a kezünkbe a differenciálegyenletek elméletének keretein belül. Sokszor hatékonyabbak, szemléletesebbek, mint az eddig már megismert eljárások. Használhatóságuknak a „sajátérték-egyenlet" létezésének szükségessége szab határt.

Jelen dolgozat „ismeretterjesző" jellegű mű. Ráadásul még mindig nincs teljesen kész. Ez főleg abban nyilvánul meg, hogy kevés a fizikai alkalmazás, és sok az elmélet. Azonban korrekt matematikai alapok nélkül nem lehet meg egy fizikai elmélet sem. Mely alapok lerakása után azonban már nem lesz nehéz még több konkrét fizikai alkalmazást találni.

A dolgozat igen kis része teljesen „teljesen saját" eredmény. Pontosabban a kényszerrezgés, a bizonyítások nagy része és a példák közül néhány saját számolás. Ennek ellenére a szerző szintén sok időt töltött a főleg ukrán, orosz és angol irodalom fordításával, megértésével és bizonyításaik érthetőbbé tételével. Közben (főleg a végén) nagyon sok hasznos eljárást talált (pl. a Fagyeejev féle mátrixinvertálás), ezért fenti vállalkozását nem bánta meg.

[1] lásd a C.1. függeléket (49. oldal)

[2] Ettől függetlenül persze vannak integrálható függvényekre alkalmas képletei is.

2. fejezet

Partikuláris megoldás megkeresése

2.1. Állandó együtthatós lineáris differenciálegyenletek

Keressük az alábbi – állandó együtthatós lineáris – differenciálegyenlet inhomogén megoldását:

$$L\left(\frac{d}{dt}\right)T\left(t\right)=f(t)\quad\left(T,f:\mathbb{R}\to\mathbb{K}\right), \tag{2.1a}$$

ahol

$$L\left(\frac{d}{dt}\right)=\sum_{i=0}^{\infty}a_i\frac{d^n}{dt^n},\ a_i\in\mathbb{K} \tag{2.1b}$$

$f\left(t\right)$ az ún. *perturbációs*, $T\left(t\right)$ pedig a keresett megoldás függvény[1]. Fontos, hogy $L(\nu)$ értelmezve legyen az egész $\mathbb{R}$ egyenesen. Ez automatikusan teljesül, ha L definiciós összegében véges sok tag van, de a végtelen sornál meg kell vizsgálnunk a konvergenciát!

Először a homogén egyenletet $\left(L\left(\frac{d}{dt}\right)T\left(t\right)=0\right)$ oldjuk meg. Ezt igen egyszerűen megtehetjük a karakterisztikus polinom felírásával [3, 3.3.1.3.2]. Az inhomogén egyenlet általános megoldását a homogén egyenlet általános és az inhomogén egyenlet partikuláris megoldásának összegeként határozhatjuk meg.

1. Lemma. *A (2.1b) által definiált L operátornak $e^{\lambda t}$ sajátfüggvénye $\frac{d}{dt}\to\lambda$ „sajátértékkel”:*

Bizonyítás:

$$L\left(\frac{d}{dt}\right)e^{\lambda t}=\sum_{i=0}^{n}a_i\left(\frac{d}{dt}\right)^n e^{\lambda t}=\sum_{i=0}^{n}a_i\lambda^n e^{\lambda t}=L\left(\lambda\right)e^{\lambda t}.$$

Hiszen

$$\frac{d}{dt}e^{\lambda t}=\lambda e^{\lambda t},\ \frac{d^2}{dt^2}e^{\lambda t}=\frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}e^{\lambda t}\right)=\frac{d}{dt}\left(\lambda e^{\lambda t}\right)=\lambda^2e^{\lambda t}$$

és így tovább.

2. Lemma. *f analítikus operátor-függvénynek $e^{\lambda t}$ szintén sajátfüggvénye.*

Bizonyítás: Írjuk fel f ($\mathbb{R}\to\mathbb{K}$) nulla körüli Taylor sorát!

$$f\left(t\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\frac{d^k}{dt^k}f(t)|_{t=0}t^k=\sum_{k=0}^{\infty}b_kt^k$$

b_k konstansok f belső „együtthatói”, azaz függetlenek attól, hogy milyen betűvel, kifejezéssel jelöljük f változóját, ezért az 1. lemmának megfelelően:

$$f\left(\frac{d}{dt}\right)e^{\lambda t}=\sum_{k=0}^{\infty}b_k\left(\frac{d}{dt}\right)^k e^{\lambda t}=\sum_{k=0}^{\infty}b_k\lambda^k e^{\lambda t}=f(\lambda)e^{\lambda t}. \tag{2.2}$$

A változók szerepének felcserélésével kapjuk:

$$f\left(\frac{d}{d\lambda}\right)e^{\lambda t}=f(t)e^{\lambda t} \tag{2.3}$$

[1] $\mathbb{K}$: $=\mathbb{R}$ vagy $\mathbb{C}$. A jelölés lényege, hogy az adott tétel, definició, levezetés igaz marad függetlenül attól, hogy a valós vagy a komplex számok halmazán írjuk azt fel.

1. Tétel. *A (2.1a) állandóegyütthatós inhomogén lineáris differenciálegyenlet partikuláris megoldása az alábbi függvény:*

$$T(t) = \lim_{\lambda=0} f\left(\frac{d}{d\lambda}\right)\left\{L^{-1}(\lambda)\, e^{\lambda t}\right\}. \quad \left(L^{-1}(\lambda) = \frac{1}{L(\lambda)}\right) \tag{2.4}$$

Értelmezés: $f\left(\frac{d}{d\lambda}\right) g(\lambda)$ azt jelenti, hogy az $f\left(\frac{d}{d\lambda}\right)$ differenciál-operátor hat a $g(\lambda)$ függvényre.

Bizonyítás: Helyettesítsük be a (2.4) függvényt (2.1a) egyenletbe. Kapjuk:

$$\begin{aligned} L\left(\frac{d}{dt}\right)\lim_{\lambda=0} f\left(\frac{d}{d\lambda}\right)\left\{L^{-1}(\lambda)\, e^{\lambda t}\right\} &= \lim_{\lambda=0} f\left(\frac{d}{d\lambda}\right)\left\{L\left(\frac{d}{dt}\right) L^{-1}(\lambda)\, e^{\lambda t}\right\} = \\ = f\left(\frac{d}{d\lambda}\right)\left\{L^{-1}(\lambda)\, L\left(\frac{d}{dt}\right) e^{\lambda t}\right\}\Bigg|_{\lambda=0} &= f\left(\frac{d}{d\lambda}\right)\left\{L^{-1}(\lambda)\left(L(\lambda)\, e^{\lambda t}\right)\right\}\Bigg|_{\lambda=0} = \\ &= f\left(\frac{d}{d\lambda}\right)\left\{e^{\lambda t}\right\}\Bigg|_{\lambda=0} = f(t)\left\{e^{\lambda t}\right\}\Bigg|_{\lambda=0} = f(t). \end{aligned} \tag{2.5}$$

(Az 1. és a 2. lemmák felhasználásával.[2]) Szavakban: $L\left(\frac{d}{dt}\right)$ differenciál-operátor (hagyomány szerint) balról jobbra hat és „átemelhető" minden olyan tagon, amely nem tartalmaz t függést. Amikor L így eljut $e^{\lambda t}$ tagig, akkor azon felveszi sajátfüggvényét. Ezek után a függvényszorzás asszociativitása miatt elvégezhetük a $L(\lambda)\, L^{-1}(\lambda)$ szorzást, és végül az analitikus derivált operátor is felveheti sajátértékét, majd $\lim_{\lambda=0}$ után kapjuk $f(t)$-t. □

A bizonyítás következő lépése, hogy megvizsgáljuk, mikor értelmes a (2.4) által definiált T függvény. Végezzük el az előírt deriválást az (A.1) egyenlet (29. oldal) felhasználásával!

$$\begin{aligned} T(t) &= \lim_{\lambda=0} f\left(\frac{d}{d\lambda}\right)\left\{L^{-1}(\lambda)\, e^{\lambda t}\right\} = \\ &= \lim_{\lambda=0}\sum_{k=0}^{\infty} b_k\left(\frac{d}{d\lambda}\right)^k\left\{L^{-1}(\lambda)\, e^{\lambda t}\right\} = \\ &= \lim_{\lambda=0}\sum_{k=0}^{\infty} b_k\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\left\{\left(\frac{d}{d\lambda}\right)^j\left(L^{-1}(\lambda)\right)\left(\frac{d}{d\lambda}\right)^{k-j} e^{\lambda t}\right\} = \\ &= \lim_{\lambda=0}\sum_{k=0}^{\infty} b_k\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\left\{t^{k-j} e^{\lambda t}\left(\frac{d}{d\lambda}\right)^j\left(L^{-1}(\lambda)\right)\right\} = \\ &= \lim_{\lambda=0}\left\{e^{\lambda t}\sum_{k=0}^{\infty} b_k\left(t+\frac{d}{d\lambda}\right)^k\right\} L^{-1}(\lambda) = \\ &= \lim_{\lambda=0}\left\{e^{\lambda t} f\left(t+\frac{d}{d\lambda}\right)\right\} L^{-1}(\lambda) = \lim_{\lambda=0}\left\{f\left(t+\frac{d}{d\lambda}\right)\right\} L^{-1}(\lambda) \end{aligned}$$

Sajnálatos módon a fenti átalakítás egyelőre nem vezet túl sok eredményre, így be kell érnünk azzal, hogy a legtöbb esetben működik a módszer.

Megjegyzés: Ahogy a bizonyításból is látszik, a partikuláris megoldás alakja független a homogén egyenlet gyökeinek multiplicitásától.

Előfordul, hogy a számolás során $\frac{0}{0}$ típusú határértéket kell kiszámolni. Ilyenkor L' Hospital szabály szerint járunk el. Ezzel a megoldással véges lépésben biztosan eredményesek leszünk.

2.1.1. Integrálható függvények

Amenyiben $f(t)$ szakaszonként folytonos, abszolút integrálható függvény, akkor felírhatjuk a Dirac-delta disztribúció segítségével:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-y)\, f(y)\, dy \tag{2.6}$$

Ahol most a Dirac-deltát az $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(x-y)\xi}\, d\xi$ integrál képviseli. Ezt beírva az előző egyenletbe, és átrendezve az intregrálásokat kapjuk:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(x-y)\xi} f(y)\, dy\, d\xi. \tag{2.7}$$

[2] A továbbiakban a $\lim_{\lambda=0}$ jelölés helyett a $|_{\lambda=0}$ jelölést használjuk.

Ezek után végezzük el a „szokásos” szimbolikus operátorképzést:

$$f\left(\frac{d}{d\lambda}\right)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{i\left(\frac{d}{d\lambda}-y\right)\xi}f(y)\;dy\,d\xi. \tag{2.8}$$

Amennyiben a fenti függvényoperátort hattatjuk egy $g(\lambda)$ λ szerint sorbafejthető függvényre, kapjuk:

$$f\left(\frac{d}{d\lambda}\right)g(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{i\xi\frac{d}{d\lambda}}g(\lambda)\,e^{-iy\xi}f(y)\;dy\,d\xi=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}g(i\xi)\,e^{-iy\xi}f(y)\;dy\,d\xi=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}g(i\xi)\,F(\xi)\;d\xi,$$

ahol

$$F(\xi)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-iy\xi}f(y)\;dy$$

Ha behelyettesítjük $g(\lambda)=e^{\lambda t}L^{-1}(\lambda)$-t:

$$f\left(\frac{d}{d\lambda}\right)\frac{e^{\lambda t}}{L(\lambda)}=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\xi}}{L(i\xi)}F(\xi)\;d\xi. \tag{2.9}$$

2.1.2. Matematikai példák

1. példa. Oldjuk meg az alábbi egyenletet:

$$\frac{d^2T}{dt^2}-4T=e^{2t}. \tag{2.10}$$

A homogén egyenlet teljes megoldását a karakterisztikus polinom felírásával kapjuk:

$$L(\lambda)=\lambda^2-4,\quad L(\lambda)\overset{!}{=}0,$$

ennek megoldása: $\lambda=\pm2$. Ezek szerint a teljes megoldás

$$T_h(t)=C_1e^{2t}+C_2e^{-2t}=c_1\,\mathrm{sh}(2t)+c_2\,\mathrm{ch}(2t)$$

alakban írható, ahol c_1 és c_2 tetszőleges állandók.

Az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását úgy kaphatjuk meg, ha behelyettesítjük a (2.4) egyenletbe.

$$T(t)=f\left(\frac{d}{d\lambda}\right)\left(\frac{e^{\lambda t}}{\lambda^2-4}\right)\Bigg|_{\lambda=0}=e^{2\frac{d}{d\lambda}}\left(\frac{e^{\lambda t}}{\lambda^2-4}\right)\Bigg|_{\lambda=0}=\lim_{\lambda\to2}\frac{e^{\lambda t}}{\lambda^2-4}=\lim_{\lambda\to2}\frac{te^{\lambda t}}{2\lambda}=\frac{te^{2t}}{4}.$$

Megj.: Az exponenciális operátor hatását (A.5) alapján számoltuk ki.

Ellenőrzés:

$$L\left(\frac{d}{dt}\right)T(t)=\left(\frac{d^2}{dt^2}-4\right)T(t)=\left(\frac{d}{dt}\right)\left(\frac{e^{2t}+2te^{2t}-\mathrm{ch}\,2t}{4}\right)-4T(t)=$$

$$=\frac{2e^{2t}+2e^{2t}+4te^{2t}-2\,\mathrm{sh}\,t}{4}-4T(t)=e^{2t}+4T(t)-4T(t)=e^{2t}.\quad\square$$

2. példa. Keressük meg a következő egyenletet kielégítő függvényeket:

$$\frac{d^3}{dt^3}T(t)+3\frac{d}{dt}T(t)-3T(t)=\sin(t). \tag{2.11}$$

A karakteriszikus polinom:

$$L(\lambda)=\lambda^3+3\lambda-3.$$

A partikuláris megoldás:

$$T(t) = \sin\left(\frac{d}{d\lambda}\right)\left(\frac{e^{\lambda t}}{\lambda^3+3\lambda-3}\right)\bigg|_{\lambda=0} = \frac{1}{2i}\left(e^{i\frac{d}{d\lambda}} - e^{-i\frac{d}{d\lambda}}\right)\left(\frac{e^{\lambda t}}{\lambda^3+3\lambda-3}\right)\bigg|_{\lambda=0} =$$
$$= \frac{1}{2i}\left(\frac{e^{\lambda t}}{\lambda^3+3\lambda-3}\bigg|_{\lambda=i} - \frac{e^{\lambda t}}{\lambda^3+3\lambda-3}\bigg|_{\lambda=-i}\right) = \frac{1}{2i}\left(\frac{e^{\lambda t}}{2i-3} - \frac{e^{\lambda t}}{-2i-3}\right) = \cdots = -\frac{1}{13}\left(2\cos t + 3\sin t\right).$$

Ellenőrzés:

$$\frac{d}{dt}T(t) = \frac{1}{13}\frac{d}{dt}(-2\cos t - 3\sin t) = \frac{1}{13}\left(2\sin t - 3\cos t\right)$$
$$\left(\frac{d}{dt}\right)^2 T(t) = \frac{1}{13}\left(2\cos t + 3\sin t\right)$$
$$\left(\frac{d}{dt}\right)^3 T(t) = \frac{1}{13}\left(-2\sin t + 3\cos t\right)$$

$$L\left(\frac{d}{dt}\right)T(t) = \frac{1}{13}\left\{-2\sin t + 3\cos t + 6\sin t - 9\cos t + 6\cos t + 9\sin t\right\} = \sin t. \quad \square$$

2.1.3. Csillapított kényszerrezgés

Amennyiben egy tömegpontra nyugalmi helyzetétől való kitérévésel arányos és ellentétes irányú erő hat, a tömegpont harmonikus rezgőmozgást fog végezni. Ha ez a tárgy közebgen mozog, általában hat rá egy sebességgel arányos surlódási erő is, ami ellentétes a sebességvektorral. Továbbá, ha a fenti két erőn kívül a testre hat egy (periódikus) és az időtől általában explicit függő külső erő, akkor beszélünk csillapított kényszerrezgésről. Ekkor a tömegpont mozgásegyenlete:[3]

$$\ddot{y} + 2\beta\dot{y} + \omega_0^2 y = f(t). \tag{2.12}$$

A homogén egyenlet megoldása a csillapítás nagyságának függvényében lehet túlcsillapított (amikor a kezdeti kitérés után exponenciálisan tart a nyugalmi helyzethez), csillapított (amikor a szinuszos viselkedés exponenciálisan csökken) vagy kritikus (az előző két eset határán). Azonban mindhárom megoldásnak van egy $e^{-\beta t}$ burkolója, ezért elég hamar meghatározóvá válik a partikuláris megoldás a homogén egyenlet megoldásával szemben.

Legyen $f(t) = a_0\sin(\omega t)$. Ekkor a partikuláris megoldás[4]:

$$y(t) = f\left(\frac{d}{d\lambda}\right)\frac{e^{\lambda t}}{L(\lambda)}\bigg|_{\lambda=0} = a_0\sin\left(\omega\frac{d}{d\lambda}\right)\left(\frac{e^{\lambda t}}{\lambda^2+2\beta\lambda+\omega_0^2}\right)\bigg|_{\lambda=0} =$$
$$= \frac{a_0}{2i}\left(e^{i\omega\frac{d}{d\lambda}} - e^{-i\omega\frac{d}{d\lambda}}\right)\left(\frac{e^{\lambda t}}{\lambda^2+2\beta\lambda+\omega_0^2}\right)\bigg|_{\lambda=0} = \frac{a_0}{2i}\left(\frac{e^{\lambda t}}{\lambda^2+2\beta\lambda+\omega_0^2}\bigg|_{\lambda=i\omega} - \frac{e^{\lambda t}}{\lambda^2+2\beta\lambda+\omega_0^2}\bigg|_{\lambda=-i\omega}\right) =$$
$$= \frac{a_0}{2i}\left(\frac{e^{i\omega t}}{\omega_0^2-\omega^2+2i\beta\omega} - \frac{e^{-i\omega t}}{\omega_0^2-\omega^2-2i\beta\omega}\right) = \frac{a_0}{2i}\left(\frac{e^{i\omega t}\left(\omega_0^2-\omega^2-2i\beta\omega\right)}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\beta^2\omega^2} - \frac{e^{-i\omega t}\left(\omega_0^2-\omega^2+2i\beta\omega\right)}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\beta^2\omega^2}\right) =$$
$$= \begin{cases} \frac{a_0}{2i}\frac{-2i\beta\omega e^{i\omega t}-2i\beta\omega e^{-i\omega t}}{4\beta^2\omega^2} = -\frac{1}{2\beta\omega}\cos(\omega t), & \text{ha } \omega_0 = \omega \\ \ldots, & \text{egyébként} = \end{cases}$$
$$= \frac{a_0}{2i}\left(\frac{e^{i\left(\omega t - \operatorname{arctg}\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2-\omega^2}\right)} - e^{-i\left(\omega t - \operatorname{arctg}\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2-\omega^2}\right)}}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\beta^2\omega^2}}\right) = \frac{a_0\sin\left(\omega t - \operatorname{arctg}\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2-\omega^2}\right)}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\beta^2\omega^2}}$$

Itt felhasználtuk, hogy ha $x, y \in \mathbb{R} \to x + iy = \sqrt{x^2+y^2}e^{i\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}$.

Ez a megoldás megegyezik a tankönyvekben próbafüggvény módszerrel megtalált megoldással.

[3] Lásd pl. [16] 50. oldal

[4] Még egyszerűbben célt érünk, ha felhasználjuk, hogy $\sin x = \Im e^x$. Ekkor végig csak egy tagunk lesz, majd az utolsó lépés, hogy ismét vegyük az imaginárius részét a kifejezésnek. Érdemes kipróbálni, gyakorlásképpen.

3. fejezet

A homogén Cauchy-feladat megoldása

3.1. Bevezető

A kezdetiérték–, vagy más néven Cauchy-feladat esetén adott pillanatban ($t = 0$) rögzítjük a keresett függvényt, majd keressük a differenciálegyenlet „időfejlődését”. Ezzel szemben a peremérték-feladatnál két adott „pillanatban” (t_1 és t_2) rögzítjük a függvényt és keressük a két „állapot” közötti fejlődés útját[1].

3.2. Hővezetési egyenlet

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) u(t,x) = 0,\ t \geq 0,\ x \in \mathbb{R}, \tag{3.1a}$$

$$u(0,x) = \varphi(x). \tag{3.1b}$$

Megj.: Az általánosabb egyenlet — $\left(\alpha^2 \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) u(t,x) = 0, \quad (\alpha \in \mathbb{R})$ — a változók megfelelő átparaméterezésével mindig visszavezethető a (3.1) egyenletre. Ez igaz a fejezetben szereplő többi egyparaméteres egyenletre is.

Ezen egyenletekre a következő „hagyományos” megoldásokat írták fel:

Fourier megoldása:

$$u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t\xi^2 + ix\xi} \hat{\varphi}(\xi)\, d\xi \tag{3.2a}$$

ahol

$$\hat{\varphi}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, e^{-ix\xi}\, dx \tag{3.2b}$$

Poisson megoldása:

$$u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi)\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} d\xi \tag{3.3}$$

A hővezetési egyenlet megoldására a fentieken kívül a következő lehetőségeink vannak:

$$u(t,x) = \exp\left(t \frac{d^2}{dx^2}\right) \varphi(x) \tag{3.4}$$

$$u(t,x) = \varphi\left(\frac{\partial}{\partial \mu}\right) \left\{ e^{\mu^2 t + \mu x} \right\} \Big|_{\mu=0} \tag{3.5}$$

[1] Jelenleg az ukrán csoport ilyen peremérték-feladatok megoldásán dolgozik. Itt az okoz nehézséget, hogy több feltétele van a megoldásfüggvény létezésének.

Bizonyítás:

$$\frac{\partial}{\partial t}u\left(t,x\right)=\exp\left(t\frac{d^2}{dx^2}\right)\frac{d^2}{dx^2}\varphi\left(x\right)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\exp\left(t\frac{d^2}{dx^2}\right)\varphi\left(x\right)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}u\left(t,x\right)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u\left(t,x\right)=\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\varphi\left(\frac{\partial}{\partial\mu}\right)\left\{e^{\mu^2t+\mu x}\right\}\Big|_{\mu=0}=\varphi\left(\frac{\partial}{\partial\mu}\right)\left\{e^{\mu^2t+\mu x}\right\}\left(\mu^2-\mu^2\right)\Big|_{\mu=0}=0$$

A kezdetiérték-egyenlet (3.1b) teljesülésének ellenőrzését az olvasóra bízzuk.

3.2.1. Példa.

Oldjuk meg a $\phi\left(x\right)=1$ egyszerű[2] esetet (3.4) segítségével:

$$u\left(t,x\right)=\exp\left(t\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\cdot1=\left(1+t\frac{d}{dt}+\frac{1}{2!}t^2\frac{d^4}{dx^4}+\ldots\right)\cdot1=1.$$

Ugyanez (3.5) szerint:

$$u\left(t,x\right)=1\left\{e^{\mu^2t+\mu x}\right\}\Big|_{\mu=0}=e^{0^2t+0x}=1.$$

3.2.2. Példa.

Oldjuk meg a (3.1) egyenletet $\varphi(x)=x^2+1$ esetén:

$$u\left(t,x\right)=\left(\frac{\partial^2}{\partial\mu^2}+1\right)\left\{e^{\mu^2t+\mu x}\right\}\Big|_{\mu=0}=x^2+2t+1.$$

A fenti két példa persze némileg ellentmond fizikai érzékünknek, de matematikailag teljesen helyes. Reálisabb eredményt kaphatunk, ha pl. trigonometrikus típusú kezdeti feltételt kötünk ki.

3.3. Inverz hővezetési egyenlet

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u\left(t,x\right)=0,\ t>0,\ x\in\mathbb{R},\tag{3.6a}$$

$$u\left(0,x\right)=\varphi\left(x\right).\tag{3.6b}$$

Ennek megoldása lesz:

$$u\left(t,x\right)=\phi\left(\frac{d}{d\mu}\right)\left(e^{\mu x-\mu^2t}\right)\Big|_{\mu=0}\tag{3.7}$$

A bizonyítás nagyon hasonló (3.5) levezetéséhez. A (3.6) inverz hővezetési egyenletnek viszont nincs (3.4) típusú megoldása.

3.3.1. Példa.

$\phi\left(x\right)=\exp\left(x\right)$ esetén

$$u\left(t,x\right)=e^{\frac{d}{d\mu}}\left(e^{\mu x-\mu^2t}\right)\Big|_{\mu=0}=\left(e^{\mu x-\mu^2t}\right)\Big|_{\mu=1}=e^{x-t}\tag{3.8}$$

Itt is felhasználtuk az (A.5) egyenlőséget.

---

[2] de pl. a Poisson féle megoldás: $u\left(t,x\right)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4t}\right)d\xi=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}2\sqrt{\pi t}=1$

3.4. Hullámegyenlet

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta_n\right) u(t,x) = 0$$
$$t \geq 0,\ x \in \mathbb{R}^n,\ n = 1,2,3,\ldots; \tag{3.9}$$
$$u(0,x) = \psi_1(\mathbf{x}), \quad \frac{\partial}{\partial t}(0,\mathbf{x}) = \psi_2(\mathbf{x}).$$

Ahol $\Delta_n = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$. Amennyiben $\varphi_1 \in \mathbf{C}^3(\mathbb{R}^n)$ és $\varphi_2 \in \mathbf{C}^3(\mathbb{R}^n)$ úgy létezik „klasszikus”[11] megoldás.

Poisson formulája ($n = 2$ esetén):

$$u(t,x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\xi - x| < t} \frac{\psi_2(\xi)\, d\xi}{\sqrt{t^2 - |\xi - x|^2}} + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial t} \int\limits_{|\xi - x| < t} \frac{\psi_1(\xi)\, d\xi}{\sqrt{t^2 - |\xi - x|^2}} \tag{3.10}$$

Kirchhoff módszere ($n = 3$ esetén):

$$u(t,x) = \frac{1}{4\pi t} \int\limits_{|\xi - x| = t} \psi_2(\xi)\, d\xi + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{1}{t} \int\limits_{|\xi - x| = t} \psi_1(\xi)\, d\xi\right\} \tag{3.11}$$

Az „új” módszerek ebben az esetben:

$$u(t,\mathbf{x}) = \operatorname{ch}\left(\sqrt{\Delta_n} t\right)\psi_1(\mathbf{x}) + \frac{\operatorname{sh}\left(\sqrt{\Delta_n} t\right)}{\sqrt{\Delta_n}}\psi_2(\mathbf{x}), \quad n = 1,2,3,\ldots \tag{3.12}$$

$$u(t,x) = \psi_1\left(\frac{\partial}{\partial \mu}\right)\left\{\operatorname{ch}(|\mu| t)\, e^{\mu \mathbf{x}}\right\}\Big|_{\mu=0} + \psi_2\left(\frac{\partial}{\partial \mu}\right)\left\{\frac{\operatorname{sh}(|\mu| t)}{|\mu|} e^{\mu x}\right\}\Big|_{\mu=\mathbf{0}}, \tag{3.13}$$

$$\text{ahol} \quad \mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n),\ \mu \cdot \mathbf{x} = \sum_{j=1}^{n} \mu_j x_j \quad n = 1,2,3,\ldots. \tag{3.14}$$

3.5. Lame egyenlet

$$\left(c_1^2 + c_2^2\right)\frac{\partial \theta}{\partial x_j} + c_2^2 \Box u_j = 0, \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R}^3, \tag{3.15a}$$

$$u_j(0,x) = \phi_{0j}(x), \quad \frac{\partial u_j(0,x)}{\partial t} = \phi_{1j}(x), \quad j = 1,2,3; \tag{3.15b}$$

$$\text{ahol } \theta = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3},\ \Box = \Delta_3 - \frac{1}{c_2^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} \tag{3.15c}$$

Ennek az egyenletnek szintén vannak klasszikus megoldásai([12],[13]), továbbá diff. operátoros [14] is. Ezt az egyeneletet azonban a következőképpen is meg lehet oldani:

$$u_i(t,x) = \sum_{k=0}^{1}\sum_{j=1}^{3} \phi_{kj}\left(\frac{\partial}{\partial \mu}\right)\left[T_{kij}(t,\mu) e^{\mu x}\right]\Big|_{\mu=0}, \tag{3.16}$$

ahol

$$T_{0ij} = \frac{\mu_i \mu_j \operatorname{ch}(c_1 |\mu| t) + \left(|\mu|^2 \delta_{ij} - \mu_i \mu_j\right)\operatorname{ch}(c_2 |\mu| t)}{|\mu|^2},$$
$$T_{1ij} = \frac{\mu_i \mu_j c_2 \operatorname{sh}(c_1 |\mu| t) + \left(|\mu|^2 \delta_{ij} - \mu_i \mu_j\right) c_1 \operatorname{sh}(c_2 |\mu| t)}{c_1 c_2 |\mu|^3}.$$

δ_{ij} a Kronecker szimbólum.

3.6. A négy módszer egyenértékűségéről

A módszerek egyenértékűségét a hővezetési egyenleten mutatjuk be.

2. Tétel. *A hővezetési egyenlet négy megoldási módszere ekvivalens egymással.*

Bizonyítás: Belátjuk, hogy (3.5)⇔(3.2), (3.2)⇒(3.3), (3.3)⇒(3.4), (3.4)⇒(3.2).

(3.5)⇔(3.2)

Fourier megoldásából indulunk ki. Írjuk fel $\varphi(x)$-et Fourier transzformáltja segítségével:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \hat{\varphi}(\xi)\, e^{ix\xi}\, d\xi. \tag{3.17}$$

Gyártsunk $\varphi(x)$-ből differenciáloperátort $x \to \frac{d}{d\mu}$ helyettesítéssel és hattasuk egy $h(\mu)$ analítikus függvényre. Ekkor A.4 felhasználásával kapjuk:

$$\varphi\left(\frac{d}{d\mu}\right) h(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \hat{\varphi}(\xi)\, h(\mu + i\xi)\, d\xi. \tag{3.18}$$

A fenti eredmény felhasználásával alakítsuk át a (3.5) egyenlőséget:

$$u(t,x) = \varphi\left(\frac{\partial}{\partial\mu}\right) \left\{ e^{\mu^2 t + \mu x} \right\} \Bigg|_{\mu=0} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \hat{\varphi}(\xi)\, e^{(\mu+i\xi)^2 t + (\mu+i\xi)x}\, d\xi \Bigg|_{\mu=0} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \hat{\varphi}(\xi)\, e^{-\xi^2 t + i\xi x}\, d\xi \quad \square$$

(3.2)⇒(3.3)

Következik a Poisson formula levezetéséből és megtalálható pl. [11] munkában.

(3.3)⇒(3.4)

Az alábbi átalakításokat végezzük (φ analítikus és $s = x - \xi$):

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{s^2}{4t}\right) \varphi(x-s)\, ds = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{s^2}{4t}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi^{(n)}(x)}{n!} (-s)^n\, ds = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi^{(n)}(x)}{n!} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{s^2}{4t}\right) (-s)^n\, ds = \end{aligned}$$

Az integrál kiszámításához vezessük be az η változót $s = 2\sqrt{t}\eta$ helyettesítéssel:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{s^2}{4t}\right) (-s)^n\, ds = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(-2\sqrt{t}\right)^n \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\eta^2} \eta^n\, d\eta = \\ &= \begin{cases} 0, & n = 2m+1 \\ \frac{1}{\sqrt{\pi}} (4t)^m\, \Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right), & n = 2m \end{cases} \qquad m = 0, 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

$$\Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right) = \left(m - \frac{1}{2}\right)\left(m - \frac{3}{2}\right) \ldots \frac{3}{2}\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{(2m-1)!\sqrt{\pi}}{2^{2m-1}(m-1)!},$$

ahonnan

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{s^2}{4t}\right) \varphi(x-s)\, ds = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varphi^{(2m)}(x)}{m!} t^m = \exp\left(t \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \varphi(x).$$

(3.4)⇒(3.2)
Hattasuk az „exponenciális operátort" $\varphi(x)$ Fourier transzormáltját felhasználva:

$$\exp\left(-t\left(i\frac{d}{dx}\right)^2\right)\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-t\xi^2\right)\hat{\varphi}\left(\xi\right)\exp\left(ix\xi\right)\,d\xi. \quad \square$$

4. fejezet

Inhomogén Cauchy-feladat

4.1. Bevezetés

Itt annyi a „nehezítés”, hogy megjelenik a perturbációs függvény is. Ezért cserébe viszont a kezdeti feltételt fogjuk egyszerűsíteni.

4.2. Hővezetési egyenlet

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u\left(t,x\right)=f\left(t,x\right),\quad t>0,\quad x\in\mathbb{R}, \tag{4.1a}$$

$$u(0,x)=0. \tag{4.1b}$$

Ennek a problémának a klasszikus megoldása:

$$u\left(t,x\right)=\int\limits_0^t\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{f\left(\tau,\xi\right)}{2\sqrt{\pi(t-\tau)}}\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\tau)}\right)d\xi d\tau, \tag{4.2}$$

Itt is kereshetjük a megoldást (3.4) szerint

$$u\left(t,x\right)=P\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right)f(t,x) \tag{4.3}$$

alakban. Kiderül, hogy ilyen megoldás nem létezik, vagy ami ezzel ekvivalens, nem oldható fel a „formális” inverz képzés:

$$u\left(t,x\right)=\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1}f(t,x). \tag{4.4}$$

Próbálkozhatunk azonban a határértékképzős operátor-megoldással (3.5), és ezzel célt is érünk.

$$u\left(t,x\right)=f\left(\frac{\partial}{\partial\lambda},\frac{\partial}{\partial\mu}\right)\left\{F(\lambda,\mu,t)e^{\mu x}\right\}\Big|_{\lambda=\mu=0} \tag{4.5a}$$

ahol

$$F(\lambda,\mu,t)=\frac{e^{\lambda t}-e^{\mu^2 t}}{\lambda-\mu^2} \tag{4.5b}$$

Egyszerűen belátható, hogy (4.5a) valóban megoldása (4.1a) egyenletnek.

4.3. Inverz hővezetési egyenlet

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u\left(t,x\right)=f(t,x)$$

$$u(0,x)=0.$$

Ennek az egyenletnek *nincsen* (4.2) *típúsú klasszikus megoldása.* Formális deriválás segítségével (4.5a) formában kapjuk a megoldást:

$$u(t,x) = f\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}, \frac{\partial}{\partial\mu}\right)\left(\frac{e^{\lambda t+\mu x} - e^{-\mu^2 t+\mu x}}{\lambda+\mu^2}\right)\Big|_{\lambda=\mu=0}. \tag{4.6}$$

4.4. Hullámegyenlet

$$\begin{gathered}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta_n\right) u(t,x) = f(t,x), \quad t>0, \quad x\in\mathbb{R}^n,\ n=2,3,\\ u(0,x) = \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = 0.\end{gathered} \tag{4.7}$$

A klasszikus megoldás különbözőképpen néz ki a különböző n dimenziók esetén:

$$u(t,x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^t \int_{|\xi-x|<t-\tau} \frac{f(\tau,\xi)\,d\xi d\tau}{\sqrt{(t-\tau)^2 - |\xi-x|^2}} \quad n=2, \tag{4.8}$$

$$u(t,x) = \frac{1}{4\pi t}\int_{|\xi-x|=t} \frac{1}{|\xi-x|} f(t-|\xi-x|,\xi)\,d\xi \quad n=3. \tag{4.9}$$

Ugyanennek az egyenletnek (4.7) a „trükkös” megoldása (4.5a) alakú, ahol

$$F(\lambda,\mu,t) = \frac{\exp(\lambda t) - \mathrm{ch}\,(|\mu|t) - \lambda\frac{\mathrm{sh}(|\mu|t)}{|\mu|}}{\lambda^2 - |\mu|^2}, \quad \mu\in\mathbb{C}^n,\ n=2,3. \tag{4.10}$$

Ez a formula mind 2, mind 3 dimenzióban érvényes, sőt, mivel a levezetésben nem kell kihasználnunk a dimenziók számát, ezért tetszőleges dimenzióban is igaz.

4.5. Lame egyenlet

A Lame egyenlet operátor módszerrel történő megoldása megtalálható a [8] műben.

5. fejezet

Parciális differenciálegyenlet-rendszerek

5.1. Bevezetés

Az elsőrendű állandóegyütthatós parciális differenciálegyenlet-rendszerek megoldása terén is sikeresen alkalmazható az operátor-módszer. Itt is az újdonság, hogy az operátor inverzét határértékképzéssel keressük meg.

5.2. A Cauchy-feladat

Definiciók:
Legyen

$$\widehat{\mathbf{E}}_n \text{ az } n \times n\text{-es egységmátrix,} \tag{5.1a}$$

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_s)\,, \tag{5.1b}$$

$$|\mathbf{U}\,(t,\mathbf{x})\rangle = \begin{pmatrix} U_1(t,\mathbf{x}) \\ U_2(t,\mathbf{x}) \\ \vdots \\ U_n(t,\mathbf{x}) \end{pmatrix}, \tag{5.1c}$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} = \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_s} \right), \tag{5.1d}$$

$$|\mathbf{\Phi}(\mathbf{x})\rangle = \begin{pmatrix} \Phi_1(\mathbf{x}) \\ \Phi_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \Phi_n(\mathbf{x}) \end{pmatrix}, \tag{5.1e}$$

$$\widehat{\mathbf{A}}\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\right) = \begin{pmatrix} a_{11}\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\right) & a_{12}\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\right) & \ldots & a_{1n}\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\right) \\ \vdots & \ddots & a_{ij}\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\right) & \vdots \\ a_{n1}\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\right) & \ldots\ldots\ldots\ldots & & a_{nn}\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\right), \end{pmatrix} \tag{5.1f}$$

ahol $a_{ij}\,(\nabla)$ állandóegyütthatójú lineáris differenicáloperátorok, azaz általános esetben

$$a_{ij}(\boldsymbol{\nu}) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{ij} \nu_1^{m_k^1} \nu_2^{m_k^2} \cdots \nu_s^{m_k^s}, \text{ ahol } a_k^{ij} \in \mathbb{K}, \quad m_k^i \in \mathbb{N}, \boldsymbol{\nu} \in \mathbb{K}^n. \tag{5.1g}$$

5.3. Idő szerint elsőrendű Cauchy-feladat

A megoldandó egyenletrendszer:

$$\frac{\partial}{\partial t}\,|\mathbf{U}\,(t,\mathbf{x})\rangle = \widehat{\mathbf{A}}\,(\nabla)\,|\mathbf{U}\,(t,\mathbf{x})\rangle\,, \tag{5.2a}$$

$$|\mathbf{U}(0,\mathbf{x})\rangle = |\mathbf{\Phi}\,(\mathbf{x})\rangle\,. \tag{5.2b}$$

(5.2a) egyenlettel ekvivalensek a következők[1]:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\langle \mathbf{U}(t,\mathbf{x})\right| = \left\langle \mathbf{U}(t,\mathbf{x})\right| \widehat{\mathbf{A}}^T(\nabla), \tag{5.3}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\widehat{\mathbf{E}}_n - \widehat{\mathbf{A}}(\nabla)\right)\left|\mathbf{U}(t,\mathbf{x})\right\rangle = \mathbf{0}. \tag{5.4}$$

5.3.1. Exponencializált megoldás

Könnyen belátható, hogy az (5.2) megoldása lesz az alábbi függvény[5],[2]:

$$\left\langle \mathbf{U}(t,\mathbf{x})\right| = \left\langle \mathbf{\Phi}\left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\nu}}\right)\right| \left\{\exp\left(\widehat{\mathbf{A}}^T(\boldsymbol{\nu})t + \widehat{\mathbf{E}}_n(\boldsymbol{\nu}\mathbf{x})\right)\right\}\Bigg|_{\boldsymbol{\nu}=\mathbf{0}}, \tag{5.5}$$

ahol $\widehat{\mathbf{E}}_n$ az $n\times n$-es egységmátrix, $\mathbf{0} = \underbrace{(0,0,\ldots,0)}_{s}$, $\boldsymbol{\nu}\mathbf{x} = \nu_1x_1 + \nu_2x_2 + \cdots + \nu_sx_s$, $\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\nu}} = \left(\frac{\partial}{\partial\nu_1}, \frac{\partial}{\partial\nu_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial\nu_s}\right)$.

Ennek a megoldásnak a feltétele az $\exp\left(\widehat{\mathbf{A}}^T(\boldsymbol{\nu})\,t\right)$ meghatározása. A bizonyításhoz kellenek az alábbi lemmák:

3. Lemma.

$$\frac{\partial}{\partial t}e^{(\cdot)t} = e^{(\cdot)t}(\cdot) \tag{5.6}$$

ahol a $(\cdot)$ nem függ t-től és az alábbi egyenlőséget is teljesítenie kell (azaz legyen „végesen” értelmezve a hatványa $n\to\infty$ esetén is), $k' = k-1$:

$$\frac{\partial}{\partial t}e^{(\cdot)t} = \frac{\partial}{\partial t}\left((\cdot) + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}(\cdot)^k t^k\right) = 0 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}(\cdot)^k kt^{(k-1)} = \sum_{k'=0}^{\infty}\frac{1}{k'!}(\cdot)^{k'}t^{k'}(\cdot) = e^{(\cdot)t}(\cdot)$$

$(\cdot)$ lehet pl. lineáris differenciáloperátorokból álló mátrix vagy analitikus függvény (l. még 1. lemma — 7. oldal).

4. Lemma.

$$\widehat{\mathbf{A}}\left(\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}}\right)e^{(\boldsymbol{\nu}\mathbf{x})\widehat{\mathbf{E}}_n} = e^{(\boldsymbol{\nu}\mathbf{x})\widehat{\mathbf{E}}_n}\widehat{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\nu}) \tag{5.7}$$

A jelöléseket l. az (5.1) egyenleteknél.

A bizonyítás itt is egyszerű:

$$e^{\alpha\widehat{\mathbf{E}}_n} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\alpha^k\widehat{\mathbf{E}}_n^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\alpha^k\widehat{\mathbf{E}}_n = \widehat{\mathbf{E}}_n e^{\alpha} = e^{\alpha}\widehat{\mathbf{E}}_n.$$

Ezt az azonosságot felhasználva:

$$\widehat{\mathbf{A}}\left(\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}}\right)e^{(\boldsymbol{\nu}\mathbf{x})\widehat{\mathbf{E}}_n} = \widehat{\mathbf{A}}\left(\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}}\right)\widehat{\mathbf{E}}_n e^{\boldsymbol{\nu}\mathbf{x}} = \widehat{\mathbf{A}}\left(\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}}\right)e^{\boldsymbol{\nu}\mathbf{x}} = e^{\boldsymbol{\nu}\mathbf{x}}\widehat{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\nu}) = e^{(\boldsymbol{\nu}\mathbf{x})\widehat{\mathbf{E}}_n}\widehat{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\nu}).$$

Itt azt használtuk ki, hogy a_{ij} mátrixelemek állandóegyütthatójú parciális lineáris differenciáloperátorok, így az $e^{\boldsymbol{\nu}\mathbf{x}}$ függvényen felveszik „sajátfüggvényüket”[2]:

$$a_{ij}\left(\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}}\right)e^{\boldsymbol{\nu}\mathbf{x}} = \sum_{k=0}^{\infty}a_k^{ij}\frac{\partial^{m_k^1}}{\partial x_1^{m_k^1}}\frac{\partial^{m_k^2}}{\partial x_2^{m_k^2}}\cdots\frac{\partial^{m_k^s}}{\partial x_s^{m_k^s}}e^{(\nu_1x_1+\nu_2x_2+\cdots+\nu_sx_s)} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}a_k^{ij}\nu_1^{m_k^1}\nu_2^{m_k^2}\cdots\nu_s^{m_k^s}e^{(\nu_1x_1+\nu_2x_2+\cdots+\nu_sx_s)} = a_{ij}(\boldsymbol{\nu})\,e^{\boldsymbol{\nu}\mathbf{x}}.$$

Miután a mátrix minden elemére igaz a fenti összefüggés, magára a mátrixra is igaz.

[1] $\widehat{\mathbf{A}}^T$ a mátrix transzponáltja. Részletesen lásd B.1.3. (34. oldal).
[2] Itt a (lineáris) diferenciálás operátoráról beszélünk, azaz $\nu^2 = \ddot{y} \neq \dot{y}^2$.

Ezek után már könnyű belátni, hogy (5.5) megoldja az (5.2) problémát, illetve az azzal ekvivalens (5.3) egyenletet. Hattasuk a differenciál operátorokat:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\langle \mathbf{U}(t,\mathbf{x})\right| = \frac{\partial}{\partial t}\left\langle \mathbf{\Phi}\left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\nu}}\right)\right| \left\{\exp\left(\widehat{\mathbf{A}}^T(\boldsymbol{\nu})t + \widehat{\mathbf{E}}_n(\boldsymbol{\nu}\mathbf{x})\right)\right\}\Big|_{\boldsymbol{\nu}=\mathbf{0}} = \\ = \left\langle \mathbf{\Phi}\left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\nu}}\right)\right| \left\{\exp\left(\widehat{\mathbf{A}}^T(\boldsymbol{\nu})t + \widehat{\mathbf{E}}_n(\boldsymbol{\nu}\mathbf{x})\right)\widehat{\mathbf{A}}^T(\boldsymbol{\nu})\right\}\Big|_{\boldsymbol{\nu}=\mathbf{0}},$$

$$\widehat{\mathbf{A}}\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\right)\left\langle \mathbf{U}(t,\mathbf{x})\right| = \widehat{\mathbf{A}}\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\right)\left\langle \mathbf{\Phi}\left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\nu}}\right)\right| \left\{\exp\left(\widehat{\mathbf{A}}^T(\boldsymbol{\nu})t + \widehat{\mathbf{E}}_n(\boldsymbol{\nu}\mathbf{x})\right)\right\}\Big|_{\boldsymbol{\nu}=\mathbf{0}} = \\ = \left\langle \mathbf{\Phi}\left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\nu}}\right)\right| \left\{\exp\left(\widehat{\mathbf{A}}^T(\boldsymbol{\nu})t + \widehat{\mathbf{E}}_n(\boldsymbol{\nu}\mathbf{x})\right)\widehat{\mathbf{A}}^T(\boldsymbol{\nu})\right\}\Big|_{\boldsymbol{\nu}=\mathbf{0}}.$$

Itt felhasználtuk a 3. és a 4. lemmát. Annak igazolása, hogy $t=0$-ban visszakapjuk $\langle\mathbf{\Phi}(\mathbf{x})|$-et behelyettesítéssel történhet:

$$\left\langle \mathbf{U}(t,\mathbf{x})\right|\Big|_{t=0} = \left\langle \mathbf{\Phi}\left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\nu}}\right)\right| \left\{\exp\left(\widehat{\mathbf{A}}^T(\boldsymbol{\nu})0 + \widehat{\mathbf{E}}_n(\boldsymbol{\nu}\mathbf{x})\right)\right\}\Big|_{\boldsymbol{\nu}=\mathbf{0}} = \\ = \left\langle \mathbf{\Phi}\left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\nu}}\right)\right| \left\{\widehat{\mathbf{E}}_n\exp(\boldsymbol{\nu}\mathbf{x})\right\}\Big|_{\boldsymbol{\nu}=\mathbf{0}} = \left\langle \mathbf{\Phi}(\mathbf{x})\right|\left\{\exp(\boldsymbol{\nu}\mathbf{x})\right\}\Big|_{\boldsymbol{\nu}=\mathbf{0}} = \left\langle \mathbf{\Phi}(\mathbf{x})\right|. \quad \square$$

Egy speciális eset

Más módszerekkel való összehasonlítás kedvéért vizsgáljuk meg azt a speciális esetet, amikor $\widehat{\mathbf{A}}$ elemei számok és $\mathbf{\Phi}$ állandó vektor! Részletesen lásd: B.1.8. (37. oldal).

$$\left\langle \mathbf{U}(t,\mathbf{x})\right| = \left\langle \mathbf{\Phi}\left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\nu}}\right)\right| \left\{\exp\left(\widehat{\mathbf{A}}^T(\boldsymbol{\nu})t + \widehat{\mathbf{E}}_n(\boldsymbol{\nu}\mathbf{x})\right)\right\}\Big|_{\boldsymbol{\nu}=\mathbf{0}},$$
$$\left\langle \mathbf{U}(t)\right| = \left\langle \mathbf{\Phi}\right| \left\{\exp\left(\widehat{\mathbf{A}}^T t + \widehat{\mathbf{E}}_n(\boldsymbol{\nu}\mathbf{x})\right)\right\}\Big|_{\boldsymbol{\nu}=\mathbf{0}},$$
$$\left\langle \mathbf{U}(t)\right| = \left\langle \mathbf{\Phi}\right| \left\{\exp\left(\widehat{\mathbf{A}}^T t\right)\right\},$$

hiszen nincs $\boldsymbol{\nu}$ függés, azaz a határérték triviálisan számolható. Valóban, a B.1.8. fejezetben (38. oldal) pontosan ez az eredmény adódik.

5.3.2. Határérték számolós eljárás

Keressük (5.2) megoldását

$$U_k(t,\mathbf{x},\boldsymbol{\nu}) = e^{\boldsymbol{\nu}\mathbf{x}}T_k(t,\boldsymbol{\nu}), \quad k=1,\ldots,n \tag{5.8}$$

alakban[3]. Ekkor $\mathbf{T}(t,\boldsymbol{\nu}) = (T_1(t,\boldsymbol{\nu}), T_2(t,\boldsymbol{\nu}),\ldots,T_n(t,\boldsymbol{\nu}))$ vektorra az alábbi egyenletet kapjuk:

$$\frac{\partial\left|\mathbf{T}(t,\boldsymbol{\nu})\right\rangle}{\partial t} = \widehat{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\nu})\left|\mathbf{T}(t,\boldsymbol{\nu})\right\rangle, \tag{5.9}$$

hiszen

$$\widehat{\mathbf{A}}(\nabla)\left|\mathbf{U}(t,\mathbf{x},\boldsymbol{\nu})\right\rangle = \widehat{\mathbf{A}}(\nabla)e^{\boldsymbol{\nu}\mathbf{x}}\left|\mathbf{T}(t,\boldsymbol{\nu})\right\rangle = \widehat{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\nu})e^{\boldsymbol{\nu}\mathbf{x}}\left|\mathbf{T}(t,\boldsymbol{\nu})\right\rangle = e^{\boldsymbol{\nu}\mathbf{x}}\widehat{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\nu})\left|\mathbf{T}(t,\boldsymbol{\nu})\right\rangle,$$
$$\frac{\partial}{\partial t}e^{\boldsymbol{\nu}\mathbf{x}}\left|\mathbf{T}(t,\boldsymbol{\nu})\right\rangle = e^{\boldsymbol{\nu}\mathbf{x}}\left|\frac{\partial\mathbf{T}(t,\boldsymbol{\nu})}{\partial t}\right\rangle.$$

A bizonyításhoz a két operátor hatását tegyük egymással egyenlővé, és használjuk fel, hogy $e^{\boldsymbol{\nu}\mathbf{x}} \neq 0$! $\square$

Az (5.9) egyenletet átírhatjuk

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\widehat{\mathbf{E}}_n - \widehat{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\nu})\right)\left|\mathbf{T}(t,\boldsymbol{\nu})\right\rangle = \left|\mathbf{0}\right\rangle \tag{5.10}$$

[3] (5.8) alakú megoldásoknál marad egy szabad vektor ($\boldsymbol{\nu}$). Ezt a kezdeti feltételek (5.2b) illesztésére fogjuk felhasználni.

alakba. Ahhoz, hogy ne a triviális megoldást kapjuk, szükséges a $\det\left(\frac{\partial}{\partial t}\widehat{\mathbf{E}}_n - \widehat{\mathbf{A}}\left(\boldsymbol{\nu}\right)\right) = 0$ feltétel[4] teljesülése. Ennek biztosítására írjuk fel $\widehat{\mathbf{A}}\left(\boldsymbol{\nu}\right)$ mátrix karakterisztikus polinomját!

$$\det\left(\lambda\widehat{\mathbf{E}}_n - \widehat{\mathbf{A}}\left(\boldsymbol{\nu}\right)\right) = \lambda^n + \xi_1(\boldsymbol{\nu})\lambda^{n-1} + \cdots + \xi_{n-1}(\boldsymbol{\nu})\lambda + \xi_n(\boldsymbol{\nu}). \tag{5.11}$$

Legyen $\widehat{\mathbf{b}}(\lambda,\boldsymbol{\nu}) = \lambda\widehat{\mathbf{E}}_n - \widehat{\mathbf{A}}\left(\boldsymbol{\nu}\right)$, $\widehat{\mathbf{B}}^T(\lambda, v)$ pedig $\widehat{\mathbf{b}}$ adjungáltja (azaz az $\widehat{\mathbf{A}}$-hoz asszociált[5] mátrix)[6]. Ekkor igaz az, hogy:

$$\sum_{j=1}^{n} b_{rj}\left(\lambda,\boldsymbol{\nu}\right) B_{pj}\left(\lambda,\boldsymbol{\nu}\right) = \delta_{rp}\det\widehat{\mathbf{b}}, \quad r,p = 1,\ldots,n, \tag{5.12}$$

ahol δ_{rp} a Kronecker szimbólum. A bizonyítás[7] megtalálható a B.1.6. függelékben (35. oldal).

Megmutatjuk, hogy az (5.2) egyenlet megoldásai az alábbi formulával megadott függvények:

$$U_j(t,\mathbf{x}) = \sum_{p=1}^{n} \Phi_p\left(\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\nu}}\right)\left\{B_{pj}\left(\frac{\partial}{\partial t},\boldsymbol{\nu}\right) W(t,\boldsymbol{\nu})e^{\boldsymbol{\nu}\mathbf{x}}\right\}\Bigg|_{\boldsymbol{\nu}=\mathbf{0}} \tag{5.13}$$

ahol $j = 1,\ldots,n$, $W(t,\boldsymbol{\nu})$ pedig megoldása az alábbi Cauchy feladatnak[8]:

$$\det\left(\widehat{\mathbf{E}}_n\frac{\partial}{\partial t} - \widehat{\mathbf{A}}\left(\boldsymbol{\nu}\right)\right) W(t,\boldsymbol{\nu}) = 0, \tag{5.14a}$$

$$\frac{d^kW}{dt^k}(0,\boldsymbol{\nu}) = \delta_{k(n-1)}, \quad k = 0,\ldots,n-1 \tag{5.14b}$$

3. Tétel. *$\widehat{\mathbf{b}}$ mátrix minden $r = 1,\ldots,n$ sorára:*

$$\sum_{j=1}^{n} b_{rj}\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}}\right) U_j(t,\mathbf{x}) = 0. \tag{5.15}$$

Bizonyítás:

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{n} b_{rj}\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}}\right)\left[\sum_{p=1}^{n}\Phi_p\left(\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\nu}}\right)\left\{B_{pj}\left(\frac{\partial}{\partial t},\boldsymbol{\nu}\right)W(t,\boldsymbol{\nu})e^{\boldsymbol{\nu}\mathbf{x}}\right\}\right]\Bigg|_{\boldsymbol{\nu}=\mathbf{0}} = \\
&= \sum_{p=1}^{n}\Phi_p\left(\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\nu}}\right)\left[\sum_{j=1}^{n} b_{rj}\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}}\right)\left\{e^{\boldsymbol{\nu}\mathbf{x}}B_{pj}\left(\frac{\partial}{\partial t},\boldsymbol{\nu}\right)W(t,\boldsymbol{\nu})\right\}\right]\Bigg|_{\boldsymbol{\nu}=\mathbf{0}} = \\
&= \sum_{p=1}^{n}\Phi_p\left(\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\nu}}\right)\left[\sum_{j=1}^{n} b_{rj}\left(\frac{\partial}{\partial t},\boldsymbol{\nu}\right)\left\{e^{\boldsymbol{\nu}\mathbf{x}}B_{pj}\left(\frac{\partial}{\partial t},\boldsymbol{\nu}\right)W(t,\boldsymbol{\nu})\right\}\right]\Bigg|_{\boldsymbol{\nu}=\mathbf{0}} = \\
&= \sum_{p=1}^{n}\Phi_p\left(\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\nu}}\right)\left[\det\widehat{\mathbf{b}}\left(\frac{\partial}{\partial t},\boldsymbol{\nu}\right)\delta_{rp}W(t,\boldsymbol{\nu})e^{\boldsymbol{\nu}\mathbf{x}}\right]\Bigg|_{\boldsymbol{\nu}=\mathbf{0}} = \\
&= \Phi_r\left(\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\nu}}\right)\det\widehat{\mathbf{b}}\left(\frac{\partial}{\partial t},\boldsymbol{\nu}\right)W(t,\boldsymbol{\nu})e^{\boldsymbol{\nu}\mathbf{x}}\Bigg|_{\boldsymbol{\nu}=\mathbf{0}} = 0.
\end{aligned}$$

Itt felhasználtuk (5.12) és (5.14a) egyenleteket. Be kell még látni, hogy

$$B_{pj}\left(\frac{\partial}{\partial t},\boldsymbol{\nu}\right)W(t,\boldsymbol{\nu})\Bigg|_{t=0} = \delta_{pj}, \quad p,j = 1,\ldots,n. \tag{5.16}$$

[4] Különben létezne inverze a mátrixnak, és ezen inverzzel beszorozva $|\mathbf{T}\rangle = |\mathbf{0}\rangle$ maradna.
[5] A definiciót részletesen lásd 42. oldalon
[6] Az adjungált mátrixokról l. még [7] és a B.1.6. függeléket (35. oldal).
[7] Figyeljünk az indexekre. Nem véletlen, hogy $\widehat{\mathbf{B}}^T$ ($\widehat{\mathbf{B}}$ transzponáltja) állt a definicióban, ugyanis ekkor lesz $\left(\widehat{\mathbf{B}}^T\right)^T = \widehat{\mathbf{B}}$.
[8] $\widehat{\mathbf{b}}(\frac{\partial}{\partial t},\boldsymbol{\nu}) = \left(\widehat{\mathbf{E}}_n\frac{\partial}{\partial t} - \widehat{\mathbf{A}}\left(\boldsymbol{\nu}\right)\right)$

Írjuk fel B_{pj} mátrixelemet!

$$B_{pj} = \det \begin{pmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \dots & a_{1(j-1)} & 0 & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \dots & a_{2(j-1)} & 0 & \dots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ -a_{(p-1)1} & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & 0 & \dots\dots & \dots\dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & 0 & \dots & \lambda - a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{cases} \lambda^{(n-1)} + c\lambda^{(n-2)} + \cdots & j = p \\ \lambda^{(n-2)} + c\lambda^{(n-3)} + \cdots & j \neq p \end{cases}$$

És az (5.14b) definició szerint csak $\frac{\partial^{(n-1)}}{\partial t^{(n-1)}}$ tag ad járulékot. Ezért valóban csak a $j = p$ átlós elemek számítanak. Ezzel (5.2) kezdeti feltételeinek illesztését is megoldottuk és triviálisan következik, hogy (5.13) valóban megoldása az (5.2) Cauchy problémának:

$$\widehat{\mathbf{b}}\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}, t\right) \mathbf{U}(t, \mathbf{x}) = \left(\frac{\partial}{\partial t}\widehat{\mathbf{E}}_n - \widehat{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\nu})\right) \mathbf{U}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad \text{(5.15) miatt és}$$

$$U_j(0, \mathbf{x}) = \sum_{p=1}^{n} \Phi_p\left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\nu}}\right) \left\{B_{pj}\left(\frac{\partial}{\partial t}, \boldsymbol{\nu}\right) W(0, \boldsymbol{\nu}) e^{\boldsymbol{\nu}\mathbf{x}}\right\}\bigg|_{\boldsymbol{\nu}=\mathbf{0}} = \sum_{p=1}^{n} \Phi_p\left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\nu}}\right) \left\{\delta_{pj} e^{\boldsymbol{\nu}\mathbf{x}}\right\}\bigg|_{\boldsymbol{\nu}=\mathbf{0}} =$$

$$= \Phi_j\left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\nu}}\right) \left\{e^{\boldsymbol{\nu}\mathbf{x}}\right\}\bigg|_{\boldsymbol{\nu}=\mathbf{0}} = \Phi_j(\mathbf{x}) \left\{e^{\boldsymbol{\nu}\mathbf{x}}\right\}\bigg|_{\boldsymbol{\nu}=\mathbf{0}} = \Phi_j(\mathbf{x}) . \quad \blacksquare$$

5.3.3. Többszörös gyökök esete

Elfajult sajátértékek esetén a karakterisztikus polinom (5.11) helyett használhatjuk a minimális polinomot ($\Psi(\lambda, \boldsymbol{\nu})$) (lásd 46. oldal) is, ekkor algebrai úton[10] található meg az a $\widehat{\mathbf{c}}$ mátrix, mely a minimális polinomhoz tartozik. Részletesen lásd a B.2.6. függeléket.

Legyen tehát (B.79) értelmében

$$g(\lambda, \mu) = \frac{\Psi(\lambda, \boldsymbol{\nu}) - \Psi(\mu, \boldsymbol{\nu})}{\lambda - \mu}, \text{ ekkor} \tag{5.17a}$$

$$\widehat{\mathbf{c}}(\lambda, \boldsymbol{\nu}) = g\left(\lambda \widehat{\mathbf{E}}_n, \widehat{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\nu})\right) \tag{5.17b}$$

Ekkor a Cauchy egyenlet (5.2) megoldása az alábbi kifejezés:

$$U_j(t, \mathbf{x}) = \sum_{p=1}^{n} \Phi_p\left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\nu}}\right) \left\{c_{jp}\left(\frac{\partial}{\partial t}, \boldsymbol{\nu}\right) V(t, \boldsymbol{\nu}) e^{\boldsymbol{\nu}\mathbf{x}}\right\}\bigg|_{\boldsymbol{\nu}=\mathbf{0}}, \tag{5.18}$$

ahol $(j = 1, \dots, n)$, c_{jp} $\widehat{\mathbf{c}}$ mátrix elemei és $V(t, \boldsymbol{\nu})$ megoldása az alábbi Cauchy feladatnak:

$$\Psi\left(\frac{\partial}{\partial t}, \boldsymbol{\nu}\right) V(t, \boldsymbol{\nu}) = 0, \tag{5.19a}$$

$$\frac{\partial^k V}{\partial t^k} = \delta_{k(q-1)}, \quad k = 0, \dots, q-1. \tag{5.19b}$$

A bizonyításhoz az egyszeres gyököknél megismert lépéseket érdemes követnünk. Belátható[9], hogy

$$\sum_{j=1}^{n} b_{rj}(\lambda, \boldsymbol{\nu}) c_{jp}(\lambda, \boldsymbol{\nu}) = \delta_{rp} \Psi(\lambda, \boldsymbol{\nu}), \quad r, p = 1, \dots, n, \tag{5.20a}$$

$$c_{jp}\left(\frac{\partial}{\partial t}, \boldsymbol{\nu}\right) V(t, \boldsymbol{\nu})\bigg|_{t=0} = \delta_{jp}, \quad j, p = 1, \dots n, \tag{5.20b}$$

továbbá ha $q < n$, akkor $\widehat{\mathbf{b}}$ determinánsát kifejezhetjük Ψ segítségével:

$$\det\left(\lambda \widehat{\mathbf{E}}_n - \widehat{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\nu})\right) = \Psi(\lambda, \boldsymbol{\nu}) \Psi_1(\lambda, \boldsymbol{\nu}) . \tag{5.20c}$$

[9]Például (5.20a) megegyezik (B.72) egyenlettel — 46. oldal.

Itt Ψ_1 maximum $n-q$ fokú polinom. Könnyű továbbá belátni, hogy

$$B_{pj}\left(\frac{\partial}{\partial t},\boldsymbol{\nu}\right)W(t,\boldsymbol{\nu})=c_{jp}\left(\frac{\partial}{\partial t},\boldsymbol{\nu}\right)V(t,\boldsymbol{\nu}) \tag{5.20d}$$

$$\Psi_1\left(\frac{\partial}{\partial t},\boldsymbol{\nu}\right)W(t,\boldsymbol{\nu})=V(t,\boldsymbol{\nu}) \tag{5.20e}$$

$$B_{pj}\left(\frac{\partial}{\partial t},\boldsymbol{\nu}\right)=c_{jp}\left(\frac{\partial}{\partial t},\boldsymbol{\nu}\right)\Psi_1\left(\frac{\partial}{\partial t},\boldsymbol{\nu}\right) \tag{5.20f}$$

Ezek után az (5.18) egyenlet bizonyítása már megegyezik az (5.13) egyenlet levezetésével.

5.4. Matematikai példák

5.4.1. Egyszeres multiplicitású gyökök

Oldjuk meg az alábbi csatolt egyenletrendszert:

$$\begin{aligned}\frac{\partial U_1}{\partial t}&=\frac{\partial U_1}{\partial x}-\frac{\partial^2 U_2}{\partial x^2},\\ \frac{\partial U_2}{\partial t}&=2U_1+4\frac{\partial U_2}{\partial x},\\ U_1(0,x)=\Phi_1(x),&\quad U_2(0,x)=\Phi_2(x)!\end{aligned} \tag{5.21}$$

Ebben az esetben $n=2$ és $s=1$. Írjuk fel $\widehat{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\nu})$ mátrixot!

$$\widehat{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\nu})=\begin{pmatrix}\nu & -\nu^2\\ 2 & 4\nu\end{pmatrix}. \tag{5.22}$$

A feladat karakteriszikus polinomja (5.11):

$$\det\left(\widehat{\mathbf{b}}(\lambda,\nu)\right)=\lambda^2-5\nu\lambda+6\nu^2,$$

$$W(t,\nu)=\frac{1}{\nu}\left(e^{3t\nu}-e^{2t\nu}\right).$$

Továbbá

$$\widehat{\mathbf{B}}(\lambda,\nu)=\begin{pmatrix}\lambda-4\nu & 2\\ -\nu^2 & \lambda-\nu\end{pmatrix},$$

$$\widehat{\mathbf{B}}\left(\frac{\partial}{\partial t},\nu\right)W(t,\nu)=\begin{pmatrix}-e^{3t\nu}+2e^{2t\nu} & \frac{2}{\nu}\left(e^{3t\nu}-e^{2t\nu}\right)\\ -\nu\left(e^{3t\nu}-e^{2t\nu}\right) & 2e^{3t\nu}-e^{2t\nu}\end{pmatrix}.$$

Innen az (5.13) formula segítségével:

$$\begin{aligned}U_1(t,x)&=\Phi_1\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{-e^{3t\nu+\nu x}+2e^{2t\nu+\nu x}\right\}\Big|_{\nu=0}-\\ &-\Phi_2\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{e^{3t\nu+\nu x}-e^{2t\nu+\nu x}\right\}\Big|_{\nu=0},\\ U_2(t,x)&=2\Phi_1\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{\frac{1}{\nu}\left(e^{3t\nu+\nu x}-e^{2t\nu+\nu x}\right)\right\}\Big|_{\nu=0}-\\ &-\Phi_2\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{2e^{3t\nu+\nu x}-e^{2t\nu+\nu x}\right\}\Big|_{\nu=0}.\end{aligned}$$

Az (A.3) trükkök segítségével:

$$\begin{aligned}U_1(t,x)&=-\Phi_1(3t+x)+2\Phi_1(2t+x)-\Phi_2'(3t+x)+\Phi_2'(2t+x),\\ U_2(t,x)&=2\int\limits_{2t+x}^{3t+x}\Phi_1(\xi)\,d\xi+2\Phi_2(3t+x)-\Phi_2(2t+x).\end{aligned}$$

5.4.2. Többszörös gyökök esete

Oldjuk meg a következő rendszert:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial U_1}{\partial t} &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+8\right)U_1 - 3\frac{\partial U_2}{\partial x} + 3\frac{\partial U_3}{\partial x},\\
\frac{\partial U_2}{\partial t} &= -3\frac{\partial U_1}{\partial x} + \left(4\frac{\partial^2}{\partial x^2}+5\right)U_2 + 3U_3,\\
\frac{\partial U_3}{\partial t} &= 3\frac{\partial U_1}{\partial x} + 3U_2 + \left(4\frac{\partial^2}{\partial x^2}+5\right)U_3,
\end{aligned}
\tag{5.23}
$$

$$
U_1(0,x)=\Phi_1(x),\ U_2(0,x)=\Phi_2(x),\ U_3(0,x)=\Phi_3(x). \tag{5.24}
$$

Ez ismét egy Cauchy feladat (5.2), ahol $n=3$ és $s=1$. Írjuk fel ismét $\widehat{\mathbf{A}}\,(\boldsymbol{\nu})$-t!

$$
\widehat{\mathbf{A}}(\nu) = \begin{pmatrix} \nu^2+8 & -3\nu & 3\nu \\ -3\nu & 4\nu^2+5 & 3 \\ 3\nu & 3 & 4\nu^2+5 \end{pmatrix} \tag{5.25}
$$

A következő lépés a karakterisztikus polinom meghatározása:

$$
\begin{aligned}
\det\widehat{\mathbf{b}} &= \left(\lambda - 4\left(\nu^2+2\right)\right)^2\left(\lambda - \left(\nu^2+2\right)\right),\\
\Psi(\lambda,\nu) &= \left(\lambda - 4\left(\nu^2+2\right)\right)\left(\lambda - \left(\nu^2+2\right)\right).
\end{aligned}
$$

Mivel $\det\left(\lambda\widehat{\mathbf{E}}_3 - \widehat{\mathbf{A}}(\nu)\right) \neq \Psi(\lambda,\nu)$, ezért most az (5.17a) formula használatával érünk egyszerűbben célt:

$$
g(\lambda,\mu) = \frac{\left(\lambda - 4\left(\nu^2+2\right)\right)\left(\lambda - \left(\nu^2+2\right)\right) - \left(\mu - 4\left(\nu^2+2\right)\right)\left(\mu - \left(\nu^2+2\right)\right)}{\lambda-\mu} = \left(\lambda - 5\left(\nu^2+2\right)\right)+\mu,
$$

ezek után az (5.17b) formula felhasználásával:

$$
\begin{aligned}
C(\lambda,\nu) &= \left(\lambda - 5\left(\nu^2+2\right)\right)\widehat{\mathbf{E}}_3 + \widehat{\mathbf{A}}(\nu) =\\
&= \begin{pmatrix} \lambda-4\nu^2-2 & -3\nu & 3\nu \\ -3\nu & \lambda-\nu^2-5 & 3 \\ 3\nu & 3 & \lambda-\nu^2-5 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Továbbá:

$$
V(t,\nu) = \frac{1}{3\left(\nu^2+2\right)}\left(e^{4\left(\nu^2+2\right)t} - e^{\left(\nu^2+2\right)t}\right).
$$

Ezek után (5.18) szerint a megoldásfüggvények:

$$
\begin{aligned}
U_1(t,x) &= \Phi_1\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{\frac{1}{\nu^2+2}\left(2e^{4\left(\nu^2+2\right)t+\nu x} + \nu^2 e^{\left(\nu^2+2\right)t+\nu x}\right)\right\}\Bigg|_{\nu=0} -\\
&- \Phi_2\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{\frac{\nu}{\nu^2+2}\left(e^{4\left(\nu^2+2\right)t+\nu x} + e^{\left(\nu^2+2\right)t+\nu x}\right)\right\}\Bigg|_{\nu=0} +\\
&+ \Phi_3\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{\frac{\nu}{\nu^2+2}\left(e^{4\left(\nu^2+2\right)t+\nu x} - e^{\left(\nu^2+2\right)t+\nu x}\right)\right\}\Bigg|_{\nu=0},\\
U_2(t,x) &= \Phi_1\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{\frac{\nu}{\nu^2+2}\left(e^{4\left(\nu^2+2\right)t+\nu x} - e^{\left(\nu^2+2\right)t+\nu x}\right)\right\}\Bigg|_{\nu=0} +\\
&- \Phi_2\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{\frac{1}{\nu^2+2}\left(\left(\nu^2+1\right)e^{4\left(\nu^2+2\right)t+\nu x} + e^{\left(\nu^2+2\right)t+\nu x}\right)\right\}\Bigg|_{\nu=0} +\\
&+ \Phi_3\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{\frac{1}{\nu^2+2}\left(e^{4\left(\nu^2+2\right)t+\nu x} - e^{\left(\nu^2+2\right)t+\nu x}\right)\right\}\Bigg|_{\nu=0},\\
U_3(t,x) &= \Phi_1\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{\frac{\nu}{\nu^2+2}\left(e^{4\left(\nu^2+2\right)t+\nu x} - e^{\left(\nu^2+2\right)t+\nu x}\right)\right\}\Bigg|_{\nu=0} +\\
&- \Phi_2\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{\frac{1}{\nu^2+2}\left(e^{4\left(\nu^2+2\right)t+\nu x} - e^{\left(\nu^2+2\right)t+\nu x}\right)\right\}\Bigg|_{\nu=0} +\\
&+ \Phi_3\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{\frac{1}{\nu^2+2}\left(\left(\nu^2+1\right)e^{4\left(\nu^2+2\right)t+\nu x} + e^{\left(\nu^2+2\right)t+\nu x}\right)\right\}\Bigg|_{\nu=0}.
\end{aligned}
$$

Amennyiben pl. $\Phi_1(x) = 1$, $\Phi_2(x) = e^x$, $\Phi_3(x) = -1$, akkor behelyettesítéssel kapjuk:

$$\begin{aligned}
U_1(t,x) &= e^{8t} - \frac{1}{3}e^x\left(e^{12t} - e^{3t}\right), \\
U_2(t,x) &= \frac{1}{3}e^x\left(2e^{12t} + e^{3t}\right) - \frac{1}{2}\left(e^{8t} - e^{2t}\right), \\
U_3(t,x) &= \frac{1}{3}e^x\left(e^{12t} - e^{3t}\right) - \frac{1}{2}\left(e^{8t} + e^{2t}\right).
\end{aligned}$$

5.4.3. Egy példa $n = 2$, $s = 2$ esetére

Oldjuk meg a következő Cauchy egyenletet:

$$\frac{\partial U_1}{\partial t} = \frac{\partial U_1}{\partial x} + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2}\right) U_2, \tag{5.26a}$$

$$\frac{\partial U_2}{\partial t} = U_1 + \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) U_2, \tag{5.26b}$$

$$U_1(0,x,y) = \Phi_1(x,y),\ U_2(0,x,y) = \Phi_2(x,y) \tag{5.26c}$$

Ez pont az (5.2) feladat, $n = 2$ és $s = 2$ esetben. A megoldáshoz szükséges mennyiségek:

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathbf{A}}\left(\boldsymbol{\nu}\right) &= \begin{pmatrix} \nu_1 & \nu_1^2 - \nu_1\nu_2^2 \\ 1 & \nu_1 + \nu_2^2 \end{pmatrix}, \\
\det\left(\lambda\widehat{\mathbf{E}}_2 - \widehat{\mathbf{A}}\left(\boldsymbol{\nu}\right)\right) &= \left(\lambda - 2\nu_1\right)\left(\lambda - \nu_2^2\right) \\
W(t,\nu) &= \frac{1}{2\nu_1 - \nu_2^2}\left(e^{2\nu_1 t} - e^{\nu_2^2 t}\right), \\
\widehat{\mathbf{B}}(\lambda,\nu) &= \begin{pmatrix} \lambda - \nu_1 - \nu_2^2 & 1 \\ \nu_1^2 - \nu_1\nu_2^2 & \lambda - \nu_1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Továbbá:

$$W \equiv W(t,\nu),\ W' \equiv \frac{dW(t,\nu)}{dt} = \frac{1}{2\nu_1 - \nu_2^2}\left(2\nu_1 e^{2\nu_1 t} - \nu_2^2 e^{nu_2^2 t}\right).$$

Most már csak az (5.13) összefüggést kell felhasználni:

$$\begin{aligned}
U_1(t,x,y) &= \Phi_1\left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right)\left[\left(W' - \left(\nu_1 + \nu_2^2\right)W\right)e^{\nu_1 x + \nu_2 y}\right]\Big|_{\boldsymbol{\nu}=\mathbf{0}} + \\
&+ \Phi_2\left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right)\left[\left(\nu_1^2 - \nu_1\nu_2^2\right)We^{\nu_1 x + \nu_2 y}\right]\Big|_{\boldsymbol{\nu}=\mathbf{0}}, \\
U_2(t,x,y) &= \Phi_1\left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right)\left[We^{\nu_1 x + \nu_2 y}\right]\Big|_{\boldsymbol{\nu}=\mathbf{0}} + \\
&+ \Phi_2\left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right)\left[\left(W' - \nu_1 W\right)e^{\nu_1 x + \nu_2 y}\right]\Big|_{\boldsymbol{\nu}=\mathbf{0}}.
\end{aligned}$$

5.4.4. „Retaldált” egyenlet

Oldjuk meg a következő egyenletrendszert:

$$\frac{\partial U_1(t,x)}{\partial t} = U_1(t,x+h) + U_2(t,x), \tag{5.27a}$$

$$\frac{\partial U_2(t,x)}{\partial t} = U_1(t,x) + U_2(t,x-h), \quad h > 0, \tag{5.27b}$$

$$U_1(0,x) = \Phi_1(x), \quad U_2(0,x) = \Phi_2(x). \tag{5.27c}$$

Ez ismét (5.2) egyenlet, $n=2$, $s=1$. A megfelelő mennyiségek[10]:

$$\widehat{\mathbf{A}}(\nu)=\begin{pmatrix} e^{\nu h} & 1 \\ 1 & e^{-\nu h}\end{pmatrix},$$
$$\det\left(\lambda\widehat{\mathbf{E}}_2-\widehat{\mathbf{A}}(\nu)\right)=\lambda\left(\lambda-2\operatorname{ch}(\nu h)\right),$$
$$W(t,\nu)=\frac{-1+e^{2t\operatorname{ch}(\nu h)}}{2\operatorname{ch}(\nu h)},$$
$$W'\equiv\frac{dW(t,\nu)}{dt}=e^{2t\operatorname{ch}(\nu h)}.$$

Ismét az (5.13) formula felhasználásával kapjuk a végeredményt:

$$\begin{aligned}
U_1(t,x)&=\Phi_1\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left[\left(W'-e^{-\nu h}W\right)e^{\nu x}\right]\Big|_{\nu=0}+\\
&+\Phi_2\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left[We^{\nu x}\right]\Big|_{\nu=0},\\
U_2(t,x)&=\Phi_1\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left[We^{\nu x}\right]\Big|_{\nu=0}+\\
&+\Phi_2\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left[\left(W'-e^{\nu h}W\right)e^{\nu x}\right]\Big|_{\nu=0}.
\end{aligned}$$

5.5. Dirac egyenlet

Oldjuk meg (5.2) egyenletet $s=3$, $n=4$ esetben, ahol

$$A\left(\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}}\right)=\begin{pmatrix} -im & 0 & -\frac{\partial}{\partial x_3} & -\frac{\partial}{\partial x_1}+i\frac{\partial}{\partial x_2} \\ 0 & -im & -\frac{\partial}{\partial x_1}-i\frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ -\frac{\partial}{\partial x_3} & -\frac{\partial}{\partial x_1}+i\frac{\partial}{\partial x_2} & im & 0 \\ -\frac{\partial}{\partial x_1}-i\frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} & 0 & im \end{pmatrix}. \tag{5.28}$$

A determináns ekkor:

$$\det\left(\lambda\widehat{\mathbf{E}}_4-\widehat{\mathbf{A}}\left(\boldsymbol{\nu}\right)\right)=\left(\lambda^2+m^2-\boldsymbol{\nu}^2\right)^2, \tag{5.29}$$

ahol $\boldsymbol{\nu}=(\nu_1,\nu_2,\nu_3)$, $\boldsymbol{\nu}^2=\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu}=\nu_1^2+\nu_2^2+\nu_3^2$. Látszik, hogy $\widehat{\mathbf{A}}\left(\boldsymbol{\nu}\right)$ minimális polinomja $\Psi(\lambda,\nu)=\lambda^2+m^2-\boldsymbol{\nu}^2$

Mivel a minimális polinom itt sem egyezik meg a determinánsal, használjuk (5.17a) formulát:

$$g(\lambda,\mu)=\frac{\Psi(\lambda,\boldsymbol{\nu})-\Psi(\mu,\boldsymbol{\nu})}{\lambda-\mu}=\frac{\lambda^2+m^2-\boldsymbol{\nu}^2-\mu^2-m^2+\boldsymbol{\nu}^2}{\lambda-\mu}=\lambda+\mu. \tag{5.30}$$

Az (5.17b) formula szerint $C(\lambda,\boldsymbol{\nu})=\lambda\widehat{\mathbf{E}}_4+\widehat{\mathbf{A}}\left(\boldsymbol{\nu}\right)$:

$$C(\lambda,\mu)=\begin{pmatrix} \lambda-im & 0 & -\nu_3 & -\nu_1+i\nu_2 \\ 0 & \lambda-im & -\nu_1-i\nu_2 & \nu_3 \\ -\nu_3 & -\nu_1+i\nu_2 & \lambda+im & 0 \\ -\nu_1-i\nu_2 & \nu_3 & 0 & \lambda+im \end{pmatrix}. \tag{5.31}$$

Ekkor

$$V(t,\boldsymbol{\nu})=\frac{\operatorname{sh}\left(\sqrt{\boldsymbol{\nu}^2-m^2}t\right)}{\sqrt{\boldsymbol{\nu}^2-m^2}}. \tag{5.32}$$

Ezek után felhasználva az alábbi jelöléseket:

$$V\equiv V(t,\boldsymbol{\nu}),\quad V'\equiv\frac{dV(t,\boldsymbol{\nu})}{dt}=\operatorname{ch}\left(\sqrt{\boldsymbol{\nu}^2-m^2t}\right),$$

[10]Hiszen $e^{\nu h}$ a h-val való eltolás operátora.

kapjuk a Dirac egyenlet általános megoldását:

$$
\begin{aligned}
U_1(t,x) = {} & \Phi_1 \left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\nu}} \left[\left(V' - imV \right) e^{\boldsymbol{\nu}\mathbf{x}} \right] \right) \Big|_{\boldsymbol{\nu}=\mathbf{0}} - \\
& - \Phi_3 \left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\nu}} \left[\nu_3 V e^{\boldsymbol{\nu}\mathbf{x}} \right] \right) \Big|_{\boldsymbol{\nu}=\mathbf{0}} + \\
& + \Phi_4 \left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\nu}} \left[\left(-\nu_1 + i\nu_2 \right) V e^{\boldsymbol{\nu}\mathbf{x}} \right] \right) \Big|_{\boldsymbol{\nu}=\mathbf{0}}, \\
U_2(t,x) = {} & \Phi_2 \left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\nu}} \left[\left(V' - imV \right) e^{\boldsymbol{\nu}\mathbf{x}} \right] \right) \Big|_{\boldsymbol{\nu}=\mathbf{0}} - \\
& - \Phi_3 \left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\nu}} \left[\left(\nu_1 + i\nu_2 \right) V e^{\boldsymbol{\nu}\mathbf{x}} \right] \right) \Big|_{\boldsymbol{\nu}=\mathbf{0}} + \\
& + \Phi_4 \left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\nu}} \left[\nu_3 V e^{\boldsymbol{\nu}\mathbf{x}} \right] \right) \Big|_{\boldsymbol{\nu}=\mathbf{0}}, \\
U_3(t,x) = {} & -\Phi_1 \left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\nu}} \left[\nu_3 V e^{\boldsymbol{\nu}\mathbf{x}} \right] \right) \Big|_{\boldsymbol{\nu}=\mathbf{0}} + \\
& + \Phi_2 \left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\nu}} \left[\left(-\nu_1 + i\nu_2 \right) V e^{\boldsymbol{\nu}\mathbf{x}} \right] \right) \Big|_{\boldsymbol{\nu}=\mathbf{0}} + \\
& + \Phi_3 \left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\nu}} \left[\left(V' + imV \right) e^{\boldsymbol{\nu}\mathbf{x}} \right] \right) \Big|_{\boldsymbol{\nu}=\mathbf{0}}, \\
U_4(t,x) = {} & -\Phi_1 \left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\nu}} \left[\left(\nu_1 + i\nu_2 \right) V e^{\boldsymbol{\nu}\mathbf{x}} \right] \right) \Big|_{\boldsymbol{\nu}=\mathbf{0}} + \\
& + \Phi_2 \left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\nu}} \left[nu_3 V e^{\boldsymbol{\nu}\mathbf{x}} \right] \right) \Big|_{\boldsymbol{\nu}=\mathbf{0}} + \\
& + \Phi_4 \left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\nu}} \left[\left(V' + imV \right) e^{\boldsymbol{\nu}\mathbf{x}} \right] \right) \Big|_{\boldsymbol{\nu}=\mathbf{0}}.
\end{aligned}
$$

5.6. Lineáris deformációk

oldjuk meg az (5.2) Cauchy problémát, ha

$$
\widehat{\mathbf{A}} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right) = \begin{pmatrix} (\alpha-\beta)\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \beta \left(\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) & (\alpha-\beta)\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} & (\alpha-\beta)\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_3} \\ (\alpha-\beta)\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} & \alpha\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \beta\frac{\partial^2}{\partial x_3^2} & (\alpha-\beta)\frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_3} \\ (\alpha-\beta)\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_3} & (\alpha-\beta)\frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_3} & \beta\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \alpha\frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \end{pmatrix}. \tag{5.33}
$$

Itt $n = 3$, $s = 3$. A determináns:

$$
\det\left(\lambda\widehat{\mathbf{E}}_3 - \widehat{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\nu})\right) = \left(\lambda - \beta\left(\nu_2^2 + \nu_3^2\right)\right)\left(\lambda - \alpha\boldsymbol{\nu}^2 + \beta\nu_1^2\right).
$$

Könnyű bebizonyítani, hogy $\widehat{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\nu})$ minimális polinomja és a levezetéshez $C(\lambda,\boldsymbol{\nu})$ mátrix a következő lesz:

$$
\Psi(\lambda,\boldsymbol{\nu}) = \left(\lambda - \beta\left(\nu_2^2 + \nu_3^2\right)\right)\left(\lambda - \alpha\boldsymbol{\nu}^2 + \beta\nu_1^2\right),
$$

$$
C(\lambda,\boldsymbol{\nu}) = \begin{pmatrix} \lambda - \alpha\left(\nu_2^2+\nu_3^2\right) & (\alpha-\beta)\nu_1\nu_2 & (\alpha-\beta)\nu_1\nu_3 \\ (\alpha-\beta)\nu_2\nu_1 & \lambda - \left((\alpha-\beta)\nu_1^2 + \beta\nu_2^2 + \alpha\nu_3^2\right) & (\alpha-\beta)\nu_3\nu_2 \\ (\alpha-\beta)\nu_3\nu_1 & (\alpha-\beta)\nu_3\nu_2 & \lambda - \left((\alpha-\beta)\nu_1^2 + \alpha\nu_2^2 + \beta\nu_3^2\right) \end{pmatrix},
$$

továbbá

$$
V(t,\boldsymbol{\nu}) = \frac{e^{-\beta\nu_1^2 t}\left(e^{\beta\boldsymbol{\nu}^2 t} - e^{\alpha\boldsymbol{\nu}^2 t}\right)}{(\beta-\alpha)\boldsymbol{\nu}^2}
$$

Látszik, hogy V ν_1, ν_2, ν_3 paraméterektől függ, amennyiben $\alpha \neq \beta$. Ekkor a három U függvényre a megoldás már egyszerű behelyettesítéssel megkapható.

A. Függelék

Hasznos fogalmak és tételek

A.1. Sokadik deriváltak

A.1.1. Függvényszorzat általános deriváltja

4. Tétel. *Legyenek f, g $\mathbb{R} \to \mathbb{K}$ n-szer differenciálható függvények, ekkor*

$$\frac{d^n}{dt^n} f(t)\, g(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{d^k}{dt^k} f(t) \right) \left(\frac{d^{n-k}}{dt^{n-k}} g(t) \right) \tag{A.1}$$

Bizonyítás: Induljunk ki a szorzatfüggvény deriválás alapképletéből:

$$(fg)' = f'g + fg' \tag{A.2}$$

Ezt ismét hattatva az (A.2) összefüggésre:

$$(fg)'' = (f'g + fg')' = f''g + f'g' + f'g' + fg''(= f''g + 2f'g' + fg'')$$
$$(fg)''' = (f''g + f'g' + f'g' + fg'')' =$$
$$f'''g + f''g' + f''g' + f'g'' + f''g' + f'g'' + f'g'' + fg'''(= f'''g + 3f''g' + 3f'g'' + fg''')$$

Azt érdemes észrevenni, hogy az m-ik lépésben összevonás nélkül 2^m tag lesz, és minden tag $f^{(i)}g^{(j)}$ alakú, ahol $i + j = m$. Ezen két állítás bizonyítása egyszerű. Egyrészt az (A.2) szerint minden tagjából az egyenletnek két új tag generálódik, azaz az m-ik lépésben: $\underbrace{1 \times 2 \times 2 \times \cdots \times 2}_{m} = 2^m$, másrészt minden deriválás pontosan egy újabb „vesszőt” helyez a keletkező egységek egyik tagjára. Vagyis ha van egy $f^{(i)}g^{(j)}$ tagunk, akkor $\frac{d}{dt} f^{(i)}g^{(j)} = f^{(i+1)}g^{(j)} + f^{(i)}g^{(j+1)}$. Azaz, ha $i + j = m \Rightarrow i + j + 1 = m + 1$. Mivel a kiindulási függvényünk fg, azaz $f^{(0)}g^{(0)}$, így valóban, az m-ik lépésben a teljes indukció elve miatt igazolódik állításunk.

Ezek után csak össze kell vonni a megfelelő tagokat. Kombinatorikából ismert, hogy n-ből k egységet pontosan $\binom{n}{k}$ féle képpen választhatunk ki, ha a sorrend nem számít. Jelen esetben ez azt jelenti, hogy ennyi darab $f^{(k)}g^{(n-k)}$ tag lesz az n-ik lépésben (mivel a szorzatban a deriválások száma n, így k rögzítésével egyértelműen rögzítettük g hatványát is). Azt, hogy minden lehetséges kombináció elő fog fordulni, a tagok száma (2^n) biztosítja. Ennyiféle képpen lehet ugyanis „n vesszőt” két elemen elhelyezni, ha számít a sorrend (mindig két választásunk van).

A.1.2. Hányadosfüggvény általános deriváltja

írjuk fel az alapképletet!

$$\left(\frac{1}{f} \right)' = -\frac{f'}{f^2} = -f' \frac{1}{f} \frac{1}{f} \tag{A.3}$$

Látszik, hogy most nehezebb dolgunk lesz, mint a szorzatfüggvény általános deriváltjának kifejezésekor. Írjunk fel még néhány tagot!

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{f}\right)'' &= \left(-f'\frac{1}{f}\frac{1}{f}\right)' = -f''\frac{1}{f}\frac{1}{f} + f'\left(f'\frac{1}{f}\frac{1}{f}\right)\frac{1}{f} + f'\frac{1}{f}\left(f'\frac{1}{f}\frac{1}{f}\right) \\
&= -f''\frac{1}{f}\frac{1}{f} + 2f'f'\frac{1}{f}\frac{1}{f}\frac{1}{f} \\
\left(\frac{1}{f}\right)''' &= \left(-f''\frac{1}{f}\frac{1}{f} + f'f'\frac{1}{f}\frac{1}{f}\frac{1}{f} + f'\frac{1}{f}f'\frac{1}{f}\frac{1}{f}\right)' =
\end{aligned}$$

$$\begin{gathered}
= -f'''\frac{1}{f}\frac{1}{f} + f''\left(f'\frac{1}{f}\frac{1}{f}\right)\frac{1}{f} + f''\frac{1}{f}\left(f'\frac{1}{f}\frac{1}{f}\right) + f''f'\frac{1}{f}\frac{1}{f}\frac{1}{f} + f'f''\frac{1}{f}\frac{1}{f}\frac{1}{f} - f'f'\left(f'\frac{1}{f}\frac{1}{f}\right)\frac{1}{f}\frac{1}{f} + \\
-f'f'\frac{1}{f}\left(f'\frac{1}{f}\frac{1}{f}\right)\frac{1}{f} - f'f'\frac{1}{f}\frac{1}{f}\left(f'\frac{1}{f}\frac{1}{f}\right) + f''\frac{1}{f}f'\frac{1}{f}\frac{1}{f} - f'\left(f'\frac{1}{f}\frac{1}{f}\right)f'\frac{1}{f}\frac{1}{f} + f'\frac{1}{f}f''\frac{1}{f}\frac{1}{f} - \\
-f'\frac{1}{f}f'\left(f'\frac{1}{f}\frac{1}{f}\right)\frac{1}{f} - f'\frac{1}{f}f'\frac{1}{f}\left(f'\frac{1}{f}\frac{1}{f}\right) = \\
-f'''\frac{1}{f}\frac{1}{f} + 6f''f'\frac{1}{f}\frac{1}{f}\frac{1}{f} - 6f'f'f'\frac{1}{f}\frac{1}{f}\frac{1}{f}\frac{1}{f}
\end{gathered}$$

$$\left(\frac{1}{f}\right)'''' = \left(-f'''\frac{1}{f}\frac{1}{f} + 6f''f'\frac{1}{f}\frac{1}{f}\frac{1}{f} - 6f'f'f'\frac{1}{f}\frac{1}{f}\frac{1}{f}\frac{1}{f}\right)' =$$

$$\begin{gathered}
= -f''''\frac{1}{f}\frac{1}{f} + f'''\left(f'\frac{1}{f}\frac{1}{f}\right)\frac{1}{f} + f'''\frac{1}{f}\left(f'\frac{1}{f}\frac{1}{f}\right) + \\
+6f'''f'\frac{1}{f}\frac{1}{f}\frac{1}{f} + 6f''f''\frac{1}{f}\frac{1}{f}\frac{1}{f} - 6f''f'\left(f'\frac{1}{f}\frac{1}{f}\right)\frac{1}{f}\frac{1}{f} - 6f''f'\frac{1}{f}\left(f'\frac{1}{f}\frac{1}{f}\right)\frac{1}{f} - 6f''f'\frac{1}{f}\frac{1}{f}\left(f'\frac{1}{f}\frac{1}{f}\right) + \\
-3\times 6f''f'f'\frac{1}{f}\frac{1}{f}\frac{1}{f}\frac{1}{f} + 4\times 6f'f'f'\left(f'\frac{1}{f}\frac{1}{f}\right)\frac{1}{f}\frac{1}{f}\frac{1}{f} = \\
= -f''''\frac{1}{f}\frac{1}{f} + 8f'''f'\frac{1}{f}\frac{1}{f}\frac{1}{f} + 6f''f''\frac{1}{f}\frac{1}{f}\frac{1}{f} - 36f''f'f'\frac{1}{f}\frac{1}{f}\frac{1}{f}\frac{1}{f} + 24f'f'f'f'\frac{1}{f}\frac{1}{f}\frac{1}{f}\frac{1}{f}\frac{1}{f}
\end{gathered}$$

Innen már leolvashatók a bizonyítandó szabályok (ezt most már az olvasóra bízzuk).

A.2. Exponenciális derivált-operátor kiszámítása

5. Tétel. $\exp\left(\alpha\frac{d}{dt}\right) f(t) = f(\alpha + t)$ *Ahol* $f(t)\mathbb{R} \to \mathbb{K}$ *analitikus függvény,* $\alpha \in \mathbb{C}$.

Bizonyítás:

Használjuk $f(t)$ helyett annak függvénysorát: $f(t) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j t^j$. Ekkor deriválva a függvénysor általános tagját (felhasználva, hogy $j(j-1)\ldots(j-k+1) = \frac{j!}{(j-k)!}$):

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^k t^j = \begin{cases} \frac{j!}{(j-k)!}t^{j-k} = & \text{ha } k < j, \\ j! & \text{ha } k = j, \\ 0 & \text{ha } k > j. \end{cases}$$

Most már felírhatjuk az exponenciális operátor hatását a függvényre:

$$\begin{aligned}
e^{\alpha\frac{d}{dt}} f(t) &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\alpha^k}{k!}\frac{d^k}{dt^k}\sum_{j=0}^{\infty} a_j t^j = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\alpha^k}{k!}\frac{d^k}{dt^k}a_j t^j = \\
&= \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k\le j}\frac{\alpha^k}{k!}a_j\frac{j!}{(j-k)!}t^{j-k} = \sum_{j=0}^{\infty} a_j\left\{\sum_{k\le j}\binom{j}{k}\alpha^k t^{j-k}\right\} = \sum_{j=0}^{\infty} a_j\,(\alpha+t)^j = f(\alpha+t).
\end{aligned} \tag{A.4}$$

Speciálisan $t = 0$ esetében:

$$e^{\alpha\frac{d}{dt}} f(t)\bigg|_{t=0} = f(\alpha). \tag{A.5}$$

Megj: Az exponenciális deriválás operátora a függvény eltolás generátora is egyben.

A.3. $R\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)e^{\beta\nu}$ típusú trükkök

Itt $R(\xi)$ $\mathbb{R}\to\mathbb{K}$ analítikus függvény.

A.3.1. Sajátérték

$$R\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)e^{\beta\nu}=R(\beta)\,e^{\beta\nu} \tag{A.6}$$

Bizonyítás:

$$R\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)e^{\beta\nu}=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\frac{\partial^k}{\partial\nu^k}e^{\beta\nu}=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\beta^k e^{\beta\nu}=R(\beta)\,e^{\beta\nu}.$$

Részletesebben lásd a 2. lemmát — 7. oldal.

A.3.2. Deriválás

$$R\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left[\nu e^{\beta\nu}\right]=R'(\beta)\,e^{\beta\nu}+\nu R(\beta)\,e^{\beta\nu} \tag{A.7}$$

Bizonyítás: Első lépésben az általános derivált-tagra látjuk be az alábbi összefüggést teljes indukció segítségével:

5. Lemma.

$$\frac{\partial^k}{\partial\nu^k}\left(\nu e^{\beta\nu}\right)=\left(k\beta^{k-1}+\nu\beta^k\right)e^{\beta\nu},\quad k\geq 1$$

Bizonyítás:

$$k=1,\quad \frac{\partial}{\partial\nu}\left(\nu e^{\beta\nu}\right)=e^{\beta\nu}+\beta\nu e^{\beta\nu}=(1+\beta\nu)\,e^{\beta\nu}\quad\surd$$

$$k=2,\quad \frac{\partial^2}{\partial\nu^2}\left(\nu e^{\beta\nu}\right)=\left(2\beta+\beta^2\nu\right)e^{\beta\nu}\quad\surd$$

Ha már n-ig eljutottunk, akkor elő tudjuk állítani $n+1$-ik tagot is:

$$\frac{\partial^{(n+1)}}{\partial\nu^{(n+1)}}\left(\nu e^{\beta\nu}\right)=\frac{\partial}{\partial\nu}\left(n\beta^{n-1}+\nu\beta^n\right)e^{\beta\nu}=\beta^n e^{\beta\nu}+\left(n\beta^{n-1}+\nu\beta^n\right)\beta e^{\beta\nu}=\Big((n+1)\beta^n+\nu\beta^{(n+1)}\Big)e^{\beta\nu}.$$

Ezek után beírva R 0 körüli Taylor sorát, kapjuk:

$$\sum_{k=0}^{\infty}a_k\frac{\partial^k}{\partial\nu^k}\left(\nu e^{\beta\nu}\right)=a_0\nu e^{\beta\nu}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k k\beta^{k-1}e^{\beta\nu}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\nu\beta^k e^{\beta\nu}=\frac{dR(\beta)}{d\beta}e^{\beta\nu}+R(\beta)e^{\beta\nu}.$$

Itt felhasználtuk, hogy

$$\frac{dR(\beta)}{d\beta}=\frac{d}{d\beta}\sum_{k=0}^{\infty}a_k\beta^k=\sum_{k=1}^{\infty}a_k k\beta^{(k-1)}. \tag{A.8}$$

Ennek az állításnak speciális esete, amikor $\nu\to 0$:

$$R\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left[\nu e^{\beta\nu}\right]\Big|_{\nu=0}=R'(\beta)\,. \tag{A.9}$$

A.3.3. Integrálás

$$R\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left[\frac{1}{\nu}\left(e^{\beta_1\nu}-e^{\beta_2\nu}\right)\right]\Big|_{\nu=0}=\int_{\beta_2}^{\beta_1}R(\xi)\;d\xi \tag{A.10}$$

B. Függelék

Fejezetek a mátrixelméletből

B.1. Alapvető fogalmak, definiciók és állítások

Ez a rész főleg [6] felhasználásával íródott. Az idézett könyvet nem csak a differenciálegyenletekkel ismerkedők forgathatják haszonnal, hanem a mátrixelmélet (pl. vektorszámítás tárgy keretében) alapjait tanulók is. Több definició és bizonyítás származik [7]-ből is.

B.1.1. A mátrix

Naívul úgy is tekinthetjük, hogy a mátrix nem más, mint számolást könnyítő jelölés, amikor is pl. a megoldandó egyenletrendszer együtthatóit mátrixba rendezzük. Azaz:

$$\begin{aligned} x+3y-2z&=5 \\ -2x+y+5z&=12 \\ 12x-2y&=7 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -2 & 1 & 5 \\ 12 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \\ 7 \end{pmatrix} \tag{B.1}$$

Amikor az $\widehat{\mathbf{A}}$ mátrixot (l. 19. oldal) bevezettük, hogy az egyenletrendszereket kezelni tudjuk, akkor is hasonló megfontolás ált a háttérben. Ekkor persze a mátrix elemei nem egyszerű számok, de ettől függetlenül tudják mindazon tulajdonságokat, amik lehetővé teszik a mátrixösszeadás és -szorzás (hagyományos) definiálását.

B.1.2. Mátrixok összeadása és szorzása

Legyen $\widehat{\mathbf{A}}, \widehat{\mathbf{B}}\; n \times m$, $\quad \widehat{\mathbf{C}}\; m \times n$ mátrix, $(n, m = 1, 2, 3, \dots)$:

$$\text{pl. } \widehat{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & a_{ij} & \vdots \\ a_{n1} & \dots\dots & & a_{nm} \end{pmatrix}, \text{ úgyanígy definiálandó } \widehat{\mathbf{B}} \text{ és } \widehat{\mathbf{C}} \text{ is.} \tag{B.2}$$

Ekkor $\widehat{\mathbf{A}}$ és $\widehat{\mathbf{B}}$ összegét az elemenkénti összeggel definiáljuk:

$$\left(\widehat{\mathbf{A}} + \widehat{\mathbf{B}}\right)_{ij} = \left(\widehat{\mathbf{A}}\right)_{ij} + \left(\widehat{\mathbf{B}}\right)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad 1 \le i \le n,\, 1 \le j \le m. \tag{B.3}$$

$\widehat{\mathbf{A}}$ és $\widehat{\mathbf{C}}$ szorzata pedig definició szerint:

$$\widehat{\mathbf{D}} = \left(\widehat{\mathbf{A}}\widehat{\mathbf{C}}\right)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}, \quad 1 \le i, j \le n. \tag{B.4}$$

Ekkor $\widehat{\mathbf{D}}$ $n \times n$-es mátrix lesz.

Megjegyzések: Amint a definicióból is látszik, összeadásnak és a szorzásnak csak a megfelelő „oldalhosszúságú” mátrixok között van értelme. Nem lehet pl. összeadni egy 5×3-as mátrixot egy 7×2-el, de ugyanígy nem szorozható össze egy 3×4 egy másik 3×4-es mátrixszal (csak egy 4×3-assal). $n \times n$-es mátrixokat azonban mind összeadni, mind szorozni lehet egymással.

A mátrixok egy speciális esete a vektor, amikor $m = 1$ (oszlopvektor) vagy $n = 1$ (sorvektor).

A mátrix elemeire az egyetlen kikötés, hogy értelmezve legyen közöttük egy „összeadás” és egy „szorzás”, lehetőleg azokkal a tulajdonságokkal, amiket ezektől a műveletektől általában elvárunk. Ennek megfelelően a mátrix elemei lehetnek például függvények pontonkénti összeadással és szorzással, vagy konvolúcióval[1]. Ekkor a mátrix persze függ a függvények változójától: $\widehat{\mathbf{A}}(t)$.

[1] $a(t), b(t)$ legyenek $[0, \infty[\to \mathbb{K}$ folytonos függvények ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ vagy $\mathbb{C}$). Ekkor mindig értelmes lesz $c(t) = \int_0^t a(t-\tau) b(\tau) d\tau$. Ez a *konvolúció* lesz a szorzás a megfelelő tulajdonságokkal (l. [9] 9-12. oldal).

B.1.3. Transzponálás, jelölések

Egy $n \times m$-es mátrix transzponáltja egy $m \times n$-es mátrix, mely elemeit a sor– és oszlopindexek felcserélésével kapjuk:

$$\left(\widehat{\mathbf{A}}^T\right)_{ij} = \left(\widehat{\mathbf{A}}\right)_{ji} = a_{ji}. \tag{B.5}$$

Ennek megfelelően az oszlopvektor transzponáltja sorvektor lesz. A dolgozatban található vektor jelölések a kvantummechanikai jelölésekhez hasonlítanak, és a továbbiakban is ezt fogjuk használni, azaz $|\mathbf{x}\rangle$ oszlopvektor, $\langle\mathbf{x}|$ pedig sorvektor.

B.1.4. Determináns és tulajdonságai

Definició: Kvadratikus $(n \times n)$ mátrixok *determinánsa* az alábbi kifejezés [2]:

$$\det \widehat{\mathbf{A}} = \sum_{k,l,\ldots,s} \varepsilon_{kl\ldots s} a_{1k} a_{2l} \ldots a_{ns}, \tag{B.6}$$

ahol $k, l, \ldots, s$ olyan indexeket jelent, melyek mindegyike az $1, \ldots, n$ értékeket veszi fel. $\varepsilon_{kl\ldots s}$ az n indexű Levi–Civita-szimbólum, melynek definiciója:

$$\varepsilon_{kl\ldots s} = \begin{cases} 1, & \text{ha } kl\ldots s \text{ az } 12\ldots n \text{ páros permutációja,} \\ -1, & \text{ha } kl\ldots s \text{ az } 12\ldots n \text{ páratlan permutációja,} \\ 0, & \text{ha } kl\ldots s \text{ az } 12\ldots n \text{ nem permutációja} \end{cases} \tag{B.7}$$

Másképp fogalmazva: $\varepsilon = 1$, ha a $kl\ldots s$ számsorból páros sok cserével tudjuk előállítani az $12\ldots$ számsort, -1, ha páratlan és 0, ha nem lehet előállítani. Például: $\varepsilon_{1324} = -1$, mert $1324 \to 1234$ egy csere, $\varepsilon_{2143} = 1$, mert $2143 \to 1243 \to 1234$ két csere, $\varepsilon_{1224} = 0$, mert ezt soha nem fogjuk 1234 számsorrá transzformálni párok megfordításával.

A definicióból látszik, hogy ahhoz hogy $\varepsilon \neq 0$ a számok közül mindegyiknek pontosan egyszer kell előfordulnia, hiszen cserével számot se teremteni, se eltüntetni nem tudunk. Ezek szerint a determinánst úgy lehet egyszerűen számolni, hogy felírjuk az $12345\ldots$ számsor összes permutációját, majd kiválasztjuk a megfelelő elemeket a mátrixban és elvégezzük a szorzásokat.

A determináns néhány tulajdonsága[3]:

- ha a mátrix két sorát felcseréljük, a determináns előjelet vált,
- ha egy mátrix két sora megegyezik, akkor a determináns zérus[4],
- ha a mátrix egy sorát $c \in \mathbb{K}$-val szorozzuk, akkor a determináns is c-vel szorzódik,
- az előző pont folyománya, hogy ha a mátrixot szorozzuk c-vel, akkor a determináns c^n-el szorzódik (n a sorok száma),
- a transzponált mátrix determinánsa megegyezik az eredeti mátrix determinánsával,
- két $n \times n$-es mátrix szorzatának determinánsa megegyezik a determinánsok szorzatával, azaz $\det\left(\widehat{\mathbf{A}}\widehat{\mathbf{B}}\right) = \det \widehat{\mathbf{A}} \cdot \det \widehat{\mathbf{B}}$

A bizonyítások megtalálhatók [7] 119-122. oldalain.

B.1.5. Almátrix, aldetermináns

Egy $n \times n$-es $\widehat{\mathbf{A}}$ kvadratikus mátrix $\widehat{\mathbf{A}}^{kl}$ almátrixának nevezzük azt az $n \times n$-es mátrixot $(1 \leq k, l \leq n)$, melynek a k-ik sorát és l-ik oszlopát kivéve minden eleme megyegyezik az $\widehat{\mathbf{A}}$ mátrixszal. A fenti oszlopban és sorban

[2] [7] 118. oldal

[3] Az alábbiakban a sorokra kimondott tételek érvényesek oszlopok esetén is, hiszen egy kvadratikus mátrix transzponáltja is kvadratikus mátrix és sorai az eredeti mátrix oszlopai.

[4] Az első tulajdonságból triviális, mert felcserélve a két egyező sort nem változik a determináns értéke, de ugyanakkor előjelet is kell váltania, azaz $x = -x \Rightarrow x = 0$.

azonban nullázzuk az elemeket, és egyedül a „kereszteződésbe” (a_{kl} írunk egyet):

$$\widehat{\mathbf{A}}^{kl} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1(l-1)} & 0 & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2(l-1)} & 0 & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ a_{(k-1)1} & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}. \tag{B.8}$$

Ennek az $\widehat{\mathbf{A}}^{kl}$ mátrixnak a determinánsát nevezzük az eredeti mátrix a_{kl} *eleméhez tartozó aldeterminánsának.*

B.1.6. Adjungált és kifejtési tétel

Egy $\widehat{\mathbf{A}}$ kvadratikus mátrix adjungáltjának (angolul *classical adjoint*) nevezzük az eredeti mátrix aldeterminánsaiból álló mátrix transzponáltját[5] ($\widehat{\mathbf{B}}$-t), azaz

$$\left(\widehat{\mathbf{B}}\right)_{ij} = b_{ij} = \det \widehat{\mathbf{A}}^{ji} \tag{B.9}$$

A transzponált mátrix alkalmas arra is, hogy a determináns kiszámítását több, de ugyanakkor egyszerűbb lépésre osszuk. Kiválasztva $\widehat{\mathbf{A}}$ tetszőleges sorát (vagy oszlopát[6]), az adott sor szerint „kifejthetjük” a mátrix determinánsát. Nézzük az alábbi példát:

$$\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = aei + bfg + cdh - afh - bdi - ceg,$$

$$\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = a \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e & f \\ 0 & h & i \end{pmatrix} + d \det \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & h & i \end{pmatrix} + g \det \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ 0 & e & f \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$a\,(ei - fh) + d\,(ch - bi) + g\,(bf - ec) = aei - afh + cdh - bdi + bfg - ceg,$$

$$\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = a \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e & f \\ 0 & h & i \end{pmatrix} + d \det \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & h & i \end{pmatrix} + g \det \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ 0 & e & f \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$a \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e & f \\ 0 & h & i \end{pmatrix} + (-1) d \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & h & i \end{pmatrix} + (-1)(-1) g \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & e & f \end{pmatrix} =$$

$$a \det \begin{pmatrix} e & f \\ h & i \end{pmatrix} - d \det \begin{pmatrix} b & c \\ h & i \end{pmatrix} + g \det \begin{pmatrix} b & c \\ e & f \end{pmatrix}$$

Megjegyzés: A gyakorlatban inkább elhagyjuk az adott sorokat, oszlopokat és az $(n-1 \times n-1)$-es mátrixok determinánsát számoljuk ki. Ilyenkor azonban életbe lép a „sakktábla” szabály, azaz a determinánsok elé egy $(-1)^{i+j}$ szoró [7] kerül (l. fent). A szabály bizonyítását az olvasóra bízzuk.

6. Tétel. *Legyen* $\widehat{\mathbf{A}}$ *kvadratikus mátrix,* $\widehat{\mathbf{B}}$ *pedig* $\widehat{\mathbf{A}}$ *adjungáltja. Ekkor*

$$\left(\widehat{\mathbf{C}} :=\right) \widehat{\mathbf{B}}\widehat{\mathbf{A}} = \widehat{\mathbf{A}}\widehat{\mathbf{B}} = \widehat{\mathbf{E}}_n \det \widehat{\mathbf{A}}. \tag{B.10}$$

Bizonyítás: Először vizsgáljuk meg az átlós elemeket ($i = j$):

$$c_{ii} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik} a_{ki} = \sum_{k=1}^{n} \left(\det \widehat{\mathbf{A}}^{ki}\right) a_{ki} \tag{B.11}$$

[5] A transzponálás miatt figyelni kell az indexekre!

[6] Mivel a transzponált mátrix ugyanazok a szabályok érvényesek, ezért mindegy

[7] szimbolikusan: $\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$. Innen a sakktábla hasonlat.

A determináns definiciójából következik, hogy minden tagban (ami nem nulla) minden indexnek pontosan egyszer kell szerepelnie. Ennek megfelelően kiemelhetjük pl. az első sor elemeit:

$$\det \widehat{\mathbf{A}} = \sum_{k,l,\dots,s} \varepsilon_{kl\dots s} a_{1k} a_{2l} \dots a_{ns} = \tag{B.12}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_{1i} \cdot \left(\sum_{l,\dots,s} \varepsilon_{il\dots s} a_{1i} a_{2l} \dots a_{ns} \right) \tag{B.13}$$

Például $n = 3$ esetén:

$$\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = a(ei - fh) + b(fg - di) + c(dh - eg).$$

Hasonlóan emelhetjük ki többi sor elemeit is. Most már csak azt kell észre vennünk, hogy ez a kiemelés pontosan megfelel a $\sum_{k=1}^{n} \left(\det \widehat{\mathbf{A}}^{ki}\right) a_{ki}$ tagnak. Ugyanis azzal, hogy az aldeterminánsban a megfelelő sort és oszlopot nulláztuk, eltüntettünk minden olyan tagot, amelyikben a_{ki} nem szerepel[8]. Ekkor kiemelve az a_{ki} helyén álló 1-est kapjuk (a jelölés konzisztenciája miatt nézzük az első sor első elemét):

$$\det \widehat{\mathbf{A}}^{11} = \sum_{l,\dots,s} \varepsilon_{1l\dots s} 1 \cdot a_{2l} \dots a_{ns}, \tag{B.14}$$

ahol $l, \dots, s$ indexek most 2-től n-ig futnak.

Ezeket a tagokat a megfelelő a_{ij} elemekkel beszorozva és összeadva pont a (B.13) szerinti determinánsfelbontást kapjuk vissza.

Most pedig vizsgáljuk meg a többi tagot ($i \neq j$)!

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik} a_{kj} = \sum_{k=1}^{n} \left(\det \widehat{\mathbf{A}}^{ki}\right) a_{kj}. \tag{B.15}$$

Legyen $\widehat{\mathbf{A}}'$ olyan mátrix, melynek i-ik oszlopa helyére a j-ik oszlopot írjuk. Ekkor egyrészt $\det \widehat{\mathbf{A}}' = 0$, másrészt $\widehat{\mathbf{A}}'^{ki} = \widehat{\mathbf{A}}^{ki} \quad (1 \leq i \leq n)$ hiszen pont a megváltoztatott oszlopot tüntetjük el a nullákkal. Az előbb az átlóbeli elemekre bebizonyított egyenlőséget felhasználva kapjuk:

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\det \widehat{\mathbf{A}}'^{ki}\right) a'_{ki} = \det \widehat{\mathbf{A}}' = 0, \tag{B.16}$$

ugyanakkor $a'_{ki} = a_{kj}$ és így

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\det \widehat{\mathbf{A}}^{ki}\right) a_{kj} = 0, \quad i \neq j. \tag{B.17}$$

B.1.7. Kvadratikus mátrix inverze

Az $\widehat{\mathbf{A}}$ kvadratikus mátrix baloldali inverzének azt a $\widehat{\mathbf{B}}$ mátrixot nevezzük, amelyre $\widehat{\mathbf{B}}\widehat{\mathbf{A}} = \widehat{\mathbf{E}}_n$, ahol $\widehat{\mathbf{E}}_n$ az $n \times n$-es egységmátrix. A jobb oldali inverzet hasonlóan definiáljuk. Nem minden mátrixnak létezik inverze.

A 6. tételt felhasználhatjuk egy kvadratikus mátrix inverzének meghatározásához is. Tegyük fel, hogy $\det \widehat{\mathbf{A}} \neq 0$. Ekkor a tétel jelöléseit felhasználva:

$$\widehat{\mathbf{B}}\widehat{\mathbf{A}} = \widehat{\mathbf{A}}\widehat{\mathbf{B}} = \det \widehat{\mathbf{A}} \widehat{\mathbf{E}}_n \Rightarrow \frac{1}{\det \widehat{\mathbf{A}}} \widehat{\mathbf{B}}\widehat{\mathbf{A}} = \widehat{\mathbf{E}}_n. \tag{B.18}$$

Ezzel egyértelműen meghatároztuk $\widehat{\mathbf{A}}$ inverzét, hiszen a 6. tétel szerint a szorzat sorrendjétől független az eredmény[9]. Továbbá beláttuk, hogy az inverz feltételének szükséges és elégséges feltétele, hogy $\det A \neq 0$ legyen.

[8]Mert egy szorzat mindenképpen nulla, ha legalább az egyik tag 0, legyen bármilyen sok szám szorzatáról is szó.

[9]Általában nem igaz, hogy $\widehat{\mathbf{C}}\widehat{\mathbf{D}} = \widehat{\mathbf{D}}\widehat{\mathbf{C}}$. Jelen esetben $\widehat{\mathbf{B}}$-nek $\widehat{\mathbf{A}}$-hoz való viszonya biztosítja a kommutálást.

B.1.8. Elsőrendű állandóegyütthatós differenciálegyenlet-rendszer

Vegyük a Cauchy-feladat (5.2, 19. oldal) egy speciáls esetét, amikor $\widehat{\mathbf{A}}$ elemei számok, azaz:

$$\widehat{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & a_{ij} & \vdots \\ a_{n1} & \dots\dots & & a_{nn}, \end{pmatrix}, a_{ij} \in \mathbb{K} \tag{B.19}$$

és ennek megfelelően a megoldandó egyenletrendszer is kevesebb változótól függ:

$$\frac{d}{dt} |\mathbf{U}(t)\rangle = \widehat{\mathbf{A}} |\mathbf{U}(t)\rangle, \tag{B.20a}$$

$$|\mathbf{U}(0)\rangle = |\mathbf{\Phi}\rangle. \tag{B.20b}$$

Egzisztencia-unicitás, független megoldások száma

A (B.20) egyenletrendszernek mindig létezik egy és csak egy megoldása, mely ráadásul az egész $t \in \mathbb{R}$ egyenesen értelmezett. Ebből következik, hogy ha egy megoldás bármely t_0 időpillanatban $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{0}$, akkor minden t-re $\mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$, hiszen $t' = t - t_0$ választással egy olyan Cauch-problémát kapunk, aminek megoldása az $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{0}$ triviális megoldás, és az unicitás miatt ez az egyetlen megoldás.

A (B.20) Cauchy-feladat összes megoldása által kifeszített vektortér dimenziója n. Ez azzal a következménnyel jár, hogy elég n független megoldást keresni. További könyítés, hogy $U_1(t), U_2(t), \dots U_n(t)$ akkor és csak akkor függetlenek, ha $U_1(0), U_2(0), \dots U_n(0)$ azok.

Ezen tételek bizonyítása (az egzisztencia-unicitás kivételével) megtalálható: [6] 243-246. oldalain.

Sajátértékek

Akárcsak az általános esetnél, itt is kereshetjük a megoldást $\mathbf{U}(t) = e^{\lambda t} |\mathbf{V}\rangle$ alakban, ahol $|\mathbf{V}\rangle \neq |\mathbf{0}\rangle$ konstans vektor. Ekkor behelyettesítés után kapjuk:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} |\mathbf{U}(t)\rangle &= \lambda e^{\lambda t} |\mathbf{V}\rangle \\ \widehat{\mathbf{A}} |\mathbf{U}(t)\rangle &= e^{\lambda t} \widehat{\mathbf{A}} |\mathbf{V}\rangle \\ \text{És mivel } e^{\lambda t} &\neq 0 \text{ ezért} \\ \lambda |\mathbf{V}\rangle &= \widehat{\mathbf{A}} |\mathbf{V}\rangle \end{aligned}$$

Ezek szerint a sajátérték egyenletet kell megoldanunk, ha kiváncsiak vagyunk a Cauch-feladat megoldására. Az utolsó lépés pedig a kezdeti feltételek illesztése, kell hogy legyen.

Egy oldalra rendezve az egyenletet kapjuk:

$$\left(\lambda \widehat{\mathbf{E}}_n - \widehat{\mathbf{A}}\right) |\mathbf{V}\rangle = |\mathbf{0}\rangle \tag{B.21}$$

Ha létezene $\lambda \widehat{\mathbf{E}}_n - \widehat{\mathbf{A}}$ mátrixnak inverze, akkor az előző egyenlet a triviális $|\mathbf{V}\rangle = |\mathbf{0}\rangle$ egyenletbe menne át[10].

Keressük tehát a $\det \left(\lambda \widehat{\mathbf{E}}_n - \widehat{\mathbf{A}}\right) = 0$ egyenlet megoldásait. Ezt hagyományosan a karakterisztikus polinom felírásával és megoldásával kapjuk:

$$\det \left(\lambda \widehat{\mathbf{E}}_n - \widehat{\mathbf{A}}\right) = \det \begin{pmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & -a_{13} & \dots \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & -a_{23} & \dots \\ \vdots & \dots\dots & \ddots & \lambda - a_{nn} \end{pmatrix} = \lambda^n - (\cdot)\lambda^{n-1} + \dots \mp \dots = p(\lambda), \tag{B.22}$$

ahol $p(\lambda)$ maximum n-ed fokú polinom. Ennek a polinomnak a gyökei adják a keresett sajátértékeket. Az algebra alaptétele szerint minden polinomnak (mely legalább elsőfokú) létezik legalább egy gyöke (ez lehet komplex is, még ha csak tisztán valós együtthatójú polinomot veszünk is)[11]. Ehhez a gyökhöz létezik legalább egy sajátvektor. Ugyanakkor $p(\lambda)$-nak maximum n különböző gyöke lehet (hiszen n-ed fokú), ezek szerint ideális esetben az $n \times n$ mátrixnak n különböző sajátértéke lehet. Továbbá n darab független megoldásunk lehet, hiszen $\mathbf{V}$ dimenziója n[12].

[10] ennek igazolásához elég balról beszorozni ezzel a létező inverzzel, hiszen bármely $\widehat{\mathbf{C}}$ mátrixra $\widehat{\mathbf{C}}^{-1}\widehat{\mathbf{C}} = \widehat{\mathbf{E}}_n$, $\widehat{\mathbf{C}}^{-1} |\mathbf{0}\rangle = |\mathbf{0}\rangle$ és $\widehat{\mathbf{E}}_n |\mathbf{V}\rangle = |\mathbf{V}\rangle$.

[11] Abból viszont hogy létezik egy gyök, következik, hogy pontosan n gyök létezik. Ha ugyanis az n fokú polinomból kiemeljük a $(\lambda - \lambda_1)$ szorzótényezőt és leosztunk vele, egy $n-1$ fokú polinomot kapunk. Ezt a kiemelést egész addig folytathatjuk, amíg $n > 0$, azaz n-szer. Figyelem! A gyökök értéke lehet ugyanaz a szám, pl. $\lambda^5 = 0$ egyenletnek ötszörös gyöke a 0.

[12] Elfajult esetben, azaz amikor kettő vagy több gyök egybeesik kevesebb lesz a független vektorok száma, ekkor más alakban keressük a többi lineárisan független megoldást.

Nem elfajult gyökök

$p(\lambda)$ karakterisztikus polinom különböző gyökeihez lineárisan független sajátvektorok tartoznak.

Komplex gyökök

Ha $\widehat{\mathbf{A}}$ valós mátrix (együtthatói mind valósak), akkor $p(\lambda)$ karakterisztikus polinom egy komplex gyökéből mindig kikeverhető két-két valós gyök.

Elfajult gyökök esete

Ha két vagy több gyök egybeesik, nem fogunk találni n független megoldást. Ekkor próbálkozhatunk a skalár függvényeknél már bevált $te^{\lambda t}$ típusú megoldás általánosításával.

$e^{\widehat{\mathbf{A}}t}$ típusú megoldás, avagy a mátrixexponens kiszámításának egy módszere

Az 5.5 ponthoz (20. oldal) egészen hasonló alakban fogjuk keresni a megoldást. Ez az általános képlet speciális esete (l. 5.3.1. — 21. oldal). Legyen tehát

$$|\mathbf{U}(t)\rangle = e^{\widehat{\mathbf{A}}t}|\mathbf{V}\rangle . \tag{B.23}$$

Ekkor deriválva $\mathbf{U}(t)$-t az automatikusan tudni fogja B.20-t. Ennek bizonyítását ismét az olvasóra bízzuk. A kérdés inkább az, hogyan lehet véges sok lépésben kiszámolni az exponenciális végtelen sorát? A válasz cseles, de ismét az általános eset (lásd [1] 35. oldal) speciális esetéről van szó. Végezzük el a következő azonos átalakításokat:

$$e^{\widehat{\mathbf{A}}t}|\mathbf{V}\rangle = e^{\widehat{\mathbf{A}}t}e^{-\lambda t}e^{\lambda t}|\mathbf{V}\rangle = e^{\left(\widehat{\mathbf{A}}-\lambda\widehat{\mathbf{E}}_n\right)t}e^{\lambda t}|\mathbf{V}\rangle = e^{\lambda t}e^{\left(\widehat{\mathbf{A}}-\lambda\widehat{\mathbf{E}}_n\right)t}|\mathbf{V}\rangle . \tag{B.24}$$

Továbbá vegyük észre, hogyha a mátrix exponenciális sorfejtésében valamelyik tag (pl. a h-ik) nulla, akkor az őt követő összes tag szintén nulla, mert $\left(A-\lambda\widehat{\mathbf{E}}_n\right)^{h+1}|\mathbf{V}\rangle = \left(A-\lambda\widehat{\mathbf{E}}_n\right)\left(\left(A-\lambda\widehat{\mathbf{E}}_n\right)^{h}|\mathbf{V}\rangle\right) = \mathbf{0}$. Ezek után felírhatjuk a mátrix-exponenst:

$$\begin{aligned} e^{\widehat{\mathbf{A}}t}|\mathbf{V}\rangle =& e^{\lambda t}e^{\left(\widehat{\mathbf{A}}-\lambda\widehat{\mathbf{E}}_n\right)t}|\mathbf{V}\rangle = \\ =& e^{\lambda t}\left(|\mathbf{V}\rangle + t\left(\widehat{\mathbf{A}}-\lambda\widehat{\mathbf{E}}_n\right)|\mathbf{V}\rangle + \cdots + \frac{t^{h-1}}{(h-1)!}\left(\widehat{\mathbf{A}}-\lambda\widehat{\mathbf{E}}_n\right)^{h-1}|\mathbf{V}\rangle\right) \end{aligned}$$

Amennyiben nem voltak elfajult sajátértékek, úgy rendelkezésünkre áll n darab lineárisan független vektor, melyek kielégítik a sajátértékegyenletet, azaz $\left(\widehat{\mathbf{A}}-\lambda_k\widehat{\mathbf{E}}_n\right)|\mathbf{V}_k\rangle = 0$, $(1 \le k \le n)$. Ekkor $\mathbf{\Phi}$ kezdetiérték vektort felírhatjuk ebben a bázisban, és kapjuk:

$$e^{\widehat{\mathbf{A}}t}|\mathbf{\Phi}\rangle = e^{\widehat{\mathbf{A}}t}\sum_{i=1}^{n}\mu_i|\mathbf{V}_i\rangle = \sum_{i=1}^{n}\mu_i e^{\lambda_i t}|\mathbf{V}_i\rangle \tag{B.25}$$

Ebben az esetben (B.25) adja a homogén egyenlet teljes megoldását adott kezdeti feltétel mellett. Sőt ekkor (ha van n független sajátvektor) $e^{\widehat{\mathbf{A}}t} = \widehat{\mathbf{X}}(t)\,\widehat{\mathbf{X}}^{-1}(0)$, ahol $\widehat{\mathbf{X}}(t)$ a független megoldásvektorokból álló *fundamentális mátrix*, melynek minden oszlopa egy vektora a megoldás-bázisnak[13].

Ha nem áll rendelkezésre n darab független megoldás, akkor a sorfejtés további tagait is figyelembe kell venni. Első lépésben meg kell határozni az összes olyan vektort, melyre $\left(\widehat{\mathbf{A}}-\lambda\widehat{\mathbf{E}}_n\right)^2|\mathbf{V}\rangle = \mathbf{0}$, de $\left(\widehat{\mathbf{A}}-\lambda\widehat{\mathbf{E}}_n\right)|\mathbf{V}\rangle \neq \mathbf{0}$. Ha szerencsénk van, akkor így megkapjuk az összes megoldást, ha nincs akkor meg kell vizsgálnunk a következő tagokat is, egészen addig, amíg nem lesz n darab megoldásunk. Az, hogy ez véges lépésben bekövetkezik a következő lemmának köszönhető.

6. Lemma. *Legyen $\widehat{\mathbf{A}}$ karakterisztikus polinomjának k különböző értékű gyöke $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k)$, mindegyikük különböző $(m_1, m_2, \ldots, m_k)$ multiplicitással[14]. Tegyük fel, hogy λ_j sajátértékhez $\nu_j < m_j$ lineárisan független sajátvektor tartozik. Ekkor az $\left(\widehat{\mathbf{A}}-\lambda_j\right)^2|\mathbf{V}\rangle = \mathbf{0}$ egyenletnek legalább $\nu_j + 1$ lineárisan független megoldása van. Általánosabban, ha ha az $\left(\widehat{\mathbf{A}}-\lambda_j\right)^h|\mathbf{V}\rangle = \mathbf{0}$ egyenletnek $h_j < m_j$ független megoldása van, akkor az $\left(\widehat{\mathbf{A}}-\lambda_j\right)^{h+1}|\mathbf{V}\rangle = \mathbf{0}$ egyenletnek legalább $h_j + 1$ független megoldása van.*

Továbbá az is megmutatható, hogy az így nyert megoldásfüggvények függetlenek lesznek. Az eljárásra példák találhatók [6] 278-281. oldalain.

[13] Bizonyítás: [6] 286. oldal.

[14] Vagyis $p(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{m_1}\ldots(\lambda-\lambda_k)^{m_k}$.

B.1.9. Hamilton–Cayley-tétel

7. Tétel. *Legyen* $p(\lambda)$ $\widehat{\mathbf{A}}$ *karakterisztikus polinomja* $\left(p(\lambda) = \lambda^n + \lambda^{n-1}p_1 + \lambda^{n-2}p_2 + \dots + (-1)^n p_n\right)$, *ekkor*

$$p\left(\widehat{\mathbf{A}}\right) = \widehat{\mathbf{A}}^n + \widehat{\mathbf{A}}^{n-1}p_1 + \widehat{\mathbf{A}}^{n-2}p_2 + \dots + (-1)^n p_n = \widehat{\mathbf{0}}, \tag{B.26}$$

vagyis maga a mátrix is kielégíti a saját karakterisztikus polinom egyenletét.

Bizonyítás: Vegyük a sajátérték-egyenletet:

$$\left(\lambda\widehat{\mathbf{E}}_n - \widehat{\mathbf{A}}\right)\widehat{\mathbf{B}} = \det\left(\lambda\widehat{\mathbf{E}}_n - \widehat{\mathbf{A}}\right)\widehat{\mathbf{E}}_n = p(\lambda)\,\widehat{\mathbf{E}}_n, \tag{B.27}$$

ahol $\widehat{\mathbf{B}}$ a $\left(\lambda\widehat{\mathbf{E}}_n - \widehat{\mathbf{A}}\right)$ mátrix adjungáltja (l. 35. oldal). $\widehat{\mathbf{B}}(\lambda)$ minden eleme $(b_{ij}(\lambda))$ maximum $n-1$ fokú polinomja lehet λ-nak. Ezért felbonthatjuk $\widehat{\mathbf{B}}$-t λ hatványai szerint: $\widehat{\mathbf{B}}(\lambda) = \lambda^{n-1}\widehat{\mathbf{B}}_0 + \dots + \lambda\widehat{\mathbf{B}}_{n-2} + \widehat{\mathbf{B}}_{n-1}$. Itt mindegyik $\widehat{\mathbf{B}}_i$ számokat tartalmazó mátrix lesz. Ezek után a (B.27) egyenletbe behelyetettesítve az előző felbontást, kapjuk:

$$\left(\lambda\widehat{\mathbf{E}}_n - \widehat{\mathbf{A}}\right)\left(\lambda^{n-1}\widehat{\mathbf{B}}_0 + \dots + \lambda\widehat{\mathbf{B}}_{n-2} + \widehat{\mathbf{B}}_{n-1}\right) = \lambda^n\widehat{\mathbf{E}}_n + \lambda^{n-1}p_1\widehat{\mathbf{E}}_n + \lambda^{n-2}p_2\widehat{\mathbf{E}}_n + \dots + (-1)^n p_n\widehat{\mathbf{E}}_n \tag{B.28}$$

Ez az egyenlőség minden λ értéknél igaz, és mivel mindkét oldalon n fokú mátrixegyütthatós polinomok állnak, ez csak úgy lehet, hogy tagonként ezek a mátrixok egyezőek. De mivel ezek az együtthatómátrixok egyezőek, λ helyére „bármit”[15] írhatunk, és ugyanúgy egyezést kell találnunk. Ennek megfelelően $\widehat{\mathbf{A}}$-t is behelyettesíthetünk, és így kapjuk:

$$\begin{aligned} p\left(\widehat{\mathbf{A}}\right) &= \widehat{\mathbf{A}}^n + \widehat{\mathbf{A}}^{n-1}p_1 + \widehat{\mathbf{A}}^{n-2}p_2 + \dots + (-1)^n p_n = \\ &= \underbrace{\left(\widehat{\mathbf{A}} - \widehat{\mathbf{A}}\widehat{\mathbf{E}}_n\right)}_{(\widehat{\mathbf{A}}-\widehat{\mathbf{A}})=\widehat{0}}\left(\widehat{\mathbf{A}}^{n-1}\widehat{\mathbf{B}}_0 + \dots + \widehat{\mathbf{A}}\widehat{\mathbf{B}}_{n-2} + \widehat{\mathbf{B}}_{n-1}\right) = \mathbf{0} \end{aligned}$$

B.2. Operátor-polinomok

Minden[16] kvadratikus $(n\times n)$ mátrixhoz szorosan kötődik két fogalom: a karakterisztikus és a minimális polinom fogalma. Ezek a polinomok fontos szerepet játszanak a mátrixelmélet legkülönfélébb területein. Például a mátrixfüggvények megértéséhez nélkülözhetetlenek ezek a polinomok.

B.2.1. Polinom-mátrixok összeadása és szorzása

Legyen $\widehat{\mathbf{A}}(\lambda)$ kvadratikus mátrix, melynek minden $a_{ij}(\lambda)$ eleme analitikus. Ekkor $a_{ij}(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{ij}^{[k]}\lambda^k$. $(a_{ij}^{[k]} \in \mathbb{K})$. $\widehat{\mathbf{A}}(\lambda)$ mátrixot *polinomális* mátrixnak (vagy röviden polinom-mátrixnak) is hívhatjuk[17]. Továbbá igaz, hogy

$$\widehat{\mathbf{A}}(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty}\widehat{\mathbf{A}}_k\lambda^k, \text{ ahol } \widehat{\mathbf{A}}_k = \begin{pmatrix} a_{11}^{[k]} & a_{12}^{[k]} & \dots & a_{1n}^{[k]} \\ a_{21}^{[k]} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & a_{nn}^{[k]} \end{pmatrix} \tag{B.29}$$

Ha az összegzést véges m-ig végezzük el, azaz legyen $(a_{ij}^{[k]} = 0\,\forall\,(k>m))$, $(i,j \in (1,2\dots,n))$-re, akkor m-et a polinom ***fokának*** hívjuk (természetesen feltéve, hogy $\widehat{\mathbf{A}}_m \neq 0$). Az m-ed fokú polinomot ***reguláris***nak hívjuk, ha $\det\widehat{\mathbf{A}}_m \neq 0$.

Vizsgáljuk meg két azonos rendű polinom-mátrix lineárkombinációját! Legyen

$$\widehat{\mathbf{A}}(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k\lambda^k$$

$$\widehat{\mathbf{B}}(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} B_k\lambda^k.$$

[15] Ennek a bárminek megfelelő módon értelmezve kell, hogy legyen tetszőleges hatványa.

[16] Ez a fejezet [10] könyv IV. fejezetének (69-82. oldal) rövidített fordítása – a jelölések megfelelő átírásával.

[17] A 7 tétel bizonyításánál (39. oldal) szereplő $\widehat{\mathbf{B}}_i$-k pont ilyen polinom-mátrixok.

Ekkor

$$\alpha\widehat{\mathbf{A}}(\lambda)+\beta\widehat{\mathbf{B}}(\lambda)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\alpha\widehat{\mathbf{A}}_k+\beta\widehat{\mathbf{B}}_k\right)\lambda^k, \tag{B.30}$$

ahol $\alpha,\beta\in\mathbb{K}$

A szorzás vizsgálatához vegyünk két n rendű m és p fokú polinom-mátrixot. Ekkor ezek szorzata:

$$\widehat{\mathbf{A}}(\lambda)\widehat{\mathbf{B}}(\lambda)=\widehat{\mathbf{A}}_m\widehat{\mathbf{B}}_p\lambda^{m+p}+\left(\widehat{\mathbf{A}}_{m-1}\widehat{\mathbf{B}}_p+\widehat{\mathbf{A}}_m\widehat{\mathbf{B}}_{p-1}\right)\lambda^{m+p-1}+\cdots+\widehat{\mathbf{A}}_0\widehat{\mathbf{B}}_0 \tag{B.31}$$

Megjegyzés: Amennyiben $\det\widehat{\mathbf{B}}_p\neq 0$ úgy a szorzat-polinom foka $m+p$. Ezt igen egyszerű belátni. Vegyük ugyanis a vezető tagot, és tegyük fel, hogy az nulla, azaz $\widehat{\mathbf{A}}_m\widehat{\mathbf{B}}_p=\widehat{\mathbf{0}}$. Ekkor, mivel $\det\widehat{\mathbf{B}}_p\neq 0$, jobbról szorozhatunk $\widehat{\mathbf{B}}_p^{-1}$-el, és kapjuk, hogy $\widehat{\mathbf{A}}_m=\widehat{\mathbf{0}}$. Ellentmondásra jutottunk, tehát a vezető tag nem lehet a nulla mátrix.

B.2.2. Polinom-mátrixok jobb és bal oldali osztója

Legyenek $\widehat{\mathbf{A}}(\lambda)$ és $\widehat{\mathbf{B}}(\lambda)$ mindketten n-ed[18] rendű mátrixok, rendre m és p fokszámmal, legyen továbbá $\widehat{\mathbf{B}}(\lambda)$ reguláris mátrix (azaz $\det\widehat{\mathbf{B}}_m\neq 0$). Ekkor a számok mintájára eloszthatjuk őket egymással, az alábbi felbontás szerint:

$$\widehat{\mathbf{A}}(\lambda)=\widehat{\mathbf{Q}}(\lambda)\widehat{\mathbf{B}}(\lambda)+\widehat{\mathbf{R}}(\lambda) \tag{B.32}$$

És „értelemszerűen” $\widehat{\mathbf{Q}}(\lambda)$ az osztás egész része, $\widehat{\mathbf{R}}(\lambda)$ a maradéka. $\mathbf{R}(\lambda)$ foka kisebb kell legyen, mint $\widehat{\mathbf{B}}(\lambda)$ foka. A fenti egyenlettel a jobb oldali osztót és maradékot definiáltuk, és hasonló módon definiálhatjuk a bal oldali osztót és maradékot is.

A „hányados” és a maradék kiszámítása

Amennyiben $m<p$, akkor választhatjuk $\widehat{\mathbf{Q}}(\lambda)=\widehat{\mathbf{0}}$, $\widehat{\mathbf{R}}(\lambda)=\widehat{\mathbf{A}}(\lambda)$ osztást. Ha $m\geq p$, akkor az osztás eredményét hagyományos módon határozhatjuk meg:[19] először „osszuk el” a két sor legmagasabbrendű tagjait egymással. Így definiáltuk az első maradékot:

$$\widehat{\mathbf{A}}^{(1)}(\lambda)=\widehat{\mathbf{A}}(\lambda)-\widehat{\mathbf{A}}_m\widehat{\mathbf{B}}_p^{-1}\lambda^{m-p}\widehat{\mathbf{B}}(\lambda). \tag{B.33}$$

$\widehat{\mathbf{A}}^{(1)}(\lambda)$ mátrix $m^{(1)}$ foka kisebb, mint m:

$$\widehat{\mathbf{A}}^{(1)}(\lambda)=\widehat{\mathbf{A}}^{(1)}_{m^{(1)}}\lambda^{m^{(1)}}+\cdots\quad\left(\widehat{\mathbf{A}}^{(1)}_{m^{(1)}}\neq 0,\, m^{(1)}<m\right). \tag{B.34}$$

Ha $m^{(1)}\geq p$ akkor megimételhetjük az előbbi eljárást, kapjuk:

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbf{A}}^{(2)}(\lambda)&=\widehat{\mathbf{A}}^{(1)}(\lambda)-\widehat{\mathbf{A}}^{(1)}_m\widehat{\mathbf{B}}_p^{-1}\lambda^{m^{(1)}-p}\widehat{\mathbf{B}}(\lambda),\\ \widehat{\mathbf{A}}^{(2)}(\lambda)&=\widehat{\mathbf{A}}^{(2)}_{m^{(2)}}\lambda^{m^{(2)}}+\cdots\quad\left(\widehat{\mathbf{A}}^{(2)}_{m^{(2)}}\neq 0,\, m^{(2)}<m^{(1)}\right)\end{aligned} \tag{B.35}$$

és így tovább, egészen addig, amíg $m^{(j)}<p$ nem lesz.

Amikor eljutottunk a $m^{(j)}<p$ kisebb tagig, akkor (B.33) és (B.35) alapján kapjuk, hogy

$$\widehat{\mathbf{A}}(\lambda)=\widehat{\mathbf{Q}}(\lambda)\widehat{\mathbf{B}}(\lambda)+\widehat{\mathbf{R}}(\lambda),$$

ahol

$$\widehat{\mathbf{Q}}(\lambda)=\widehat{\mathbf{A}}_m\widehat{\mathbf{B}}_p^{-1}\lambda^{m-p}+\widehat{\mathbf{A}}^{(1)}_{m^{(1)}}\widehat{\mathbf{B}}_p^{-1}\lambda^{m^{(1)}-p}+\cdots\quad\square \tag{B.36}$$

Mutassuk meg, hogy ez az osztás *egyértelmű*. Ehhez tegyük fel, hogy sikerült egyszerre

$$\widehat{\mathbf{A}}(\lambda)=\widehat{\mathbf{Q}}(\lambda)\widehat{\mathbf{B}}(\lambda)+\widehat{\mathbf{R}}(\lambda) \tag{B.37}$$

---

[18] Azaz a mátrix $n\times n$-szeres

[19] Ez a módszer analóg azzal, mint amikor polinomok „hányadosát” keressük, azaz például $\underbrace{x^5+3x^4}_{\widehat{\mathbf{A}}}=\underbrace{\left(x^3+3x^2+x+3\right)}_{\widehat{\mathbf{Q}}}\underbrace{\left(x^2-1\right)}_{\widehat{\mathbf{B}}}+\underbrace{(x+3)}_{\widehat{\mathbf{R}}}$, csak itt az állandók helyett állandókból álló kvadratikus mátrixok szerepelnek.

és

$$\widehat{\mathbf{A}}(\lambda) = \widehat{\mathbf{Q}'}(\lambda)\,\widehat{\mathbf{B}}(\lambda) + \widehat{\mathbf{R}'}(\lambda) \tag{B.38}$$

alakban is felbontani $\widehat{\mathbf{A}}$-t. Ekkor $\widehat{\mathbf{R}}(\lambda)$ és $\widehat{\mathbf{R}'}(\lambda)$ foka is kisebb, mint $\widehat{\mathbf{B}}(\lambda)$ foka, vagyis mint p. Kivonva egymásból a két előállítást, kapjuk:

$$\left(\widehat{\mathbf{Q}}(\lambda) - \widehat{\mathbf{Q}'}(\lambda)\right)\widehat{\mathbf{B}}(\lambda) = \widehat{\mathbf{R}'}(\lambda) - \widehat{\mathbf{R}}(\lambda) \tag{B.39}$$

Ha $\left(\widehat{\mathbf{Q}}(\lambda) - \widehat{\mathbf{Q}'}(\lambda)\right) \neq \widehat{\mathbf{0}}$, akkor, mivel $\det \widehat{\mathbf{B}}_p \neq 0$, ezért (B.39) bal oldalának foka megegyezne $\widehat{\mathbf{B}}(\lambda)$ és $\left(\widehat{\mathbf{Q}}(\lambda) - \widehat{\mathbf{Q}'}(\lambda)\right)$ fokának összegével (lásd a megjegyzést a szorzással kapcsolatban a 40 oldalon), azaz $\geq p$ lenne. Ez azonban lehetetlen, mert a jobb oldalon $< p$ fokú tagok állnak. Ezek szerint $\widehat{\mathbf{Q}}(\lambda) = \widehat{\mathbf{Q}'}(\lambda)$ és ebből (B.39) szerint $\widehat{\mathbf{R}}(\lambda) = \widehat{\mathbf{R}'}(\lambda)$. $\square$

Hasonló módon látható be ugyanez a bal oldali osztóra és maradékra.

Példa.

$$\widehat{\mathbf{A}}(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda^3+\lambda & 2\lambda^3+\lambda^2 \\ -\lambda^3-2\lambda^2+1 & 3\lambda^3+\lambda \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}}^{\widehat{\mathbf{A}}_3}\lambda^3 + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}\lambda^2 + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\lambda + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\widehat{\mathbf{B}}(\lambda) = \begin{pmatrix} 2\lambda^2+3 & -\lambda^2+1 \\ -\lambda^2-1 & \lambda^2+2 \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}^{\widehat{\mathbf{B}}_2}\lambda^2 + \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Számoljuk ki a szükséges mennyiségeket!

$$\det \widehat{\mathbf{B}}_2 = 1,\quad \widehat{\mathbf{B}}_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},\quad \widehat{\mathbf{A}}_3\widehat{\mathbf{B}}_2^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 5 \end{pmatrix},\quad \widehat{\mathbf{A}}_3\widehat{\mathbf{B}}_2^{-1}\widehat{\mathbf{B}}(\lambda) = \begin{pmatrix} l^2+4 & 2\lambda^2+13 \\ -\lambda^2+1 & 3l^2+12 \end{pmatrix}$$

$$\widehat{\mathbf{A}}^{(1)}(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda^3+1 & 2\lambda^3+\lambda^2 \\ -\lambda^3-2\lambda^2+1 & 3\lambda^3+\lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda^3+4\lambda & 2\lambda^3+13\lambda \\ -\lambda^3+\lambda & 3\lambda^3+12\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3\lambda & \lambda^2-13\lambda \\ -2\lambda^2-\lambda+1 & -11\lambda \end{pmatrix},$$

$$\widehat{\mathbf{A}}^{(1)}(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}\lambda^2 + \begin{pmatrix} -3 & -13 \\ -1 & -11 \end{pmatrix}\lambda + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\widehat{\mathbf{A}}_2^{(1)}\widehat{\mathbf{B}}_2^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix},$$

$$\widehat{\mathbf{A}}_2^{(1)}\widehat{\mathbf{B}}_2^{-1}\widehat{\mathbf{B}}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2\lambda^2+3 & -\lambda^2+1 \\ -\lambda^2-1 & \lambda^2+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda^2+5 \\ -2\lambda^2-4 & 6 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbf{R}}(\lambda) &= \widehat{\mathbf{A}}^{(1)} - \widehat{\mathbf{A}}_2^{(1)}\widehat{\mathbf{B}}_2^{-1}\widehat{\mathbf{B}}(\lambda) = \\ &= \begin{pmatrix} -3\lambda & \lambda^2-13\lambda \\ -2\lambda^2-\lambda+1 & -11\lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & \lambda^2+5 \\ -2\lambda^2-4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3\lambda-1 & -13\lambda-5 \\ -\lambda+5 & -11\lambda+6 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

$$\widehat{\mathbf{Q}}(\lambda) = \widehat{\mathbf{A}}_3\widehat{\mathbf{B}}_2^{-1}\lambda + \widehat{\mathbf{A}}_2^{(1)}\widehat{\mathbf{B}}_0^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\lambda + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\lambda+1 & 5\lambda+2 \\ 2\lambda-2 & 5\lambda-2 \end{pmatrix}$$

Az olvasóra hagyjuk annak belátását, hogy valónan $\widehat{\mathbf{A}}(\lambda) = \widehat{\mathbf{Q}}(\lambda)\,\widehat{\mathbf{B}}(\lambda) + \widehat{\mathbf{R}}(\lambda)$.

B.2.3. Bez általános tétele

Vizsgáljuk meg, a polinom-mátrixok tagonkénti „kommutálását”! Egy általános n-ed rendű, m-ed fokú polinom-mátrixot felírhatunk

$$\widehat{\mathbf{F}}(\lambda) = \widehat{\mathbf{F}}_m\lambda^m + \widehat{\mathbf{F}}_{m-1}\lambda^{m-1} + \cdots + \widehat{\mathbf{F}} \quad \left(F_m \neq \widehat{\mathbf{0}}\right). \tag{B.40}$$

Ezt a sort „természetesen” így is írhatjuk:

$$\widehat{\mathbf{F}}(\lambda) = \lambda^m\widehat{\mathbf{F}} + \lambda^{m-1}\widehat{\mathbf{F}}_{m-1} + \cdots + \widehat{\mathbf{F}}. \tag{B.41}$$

Ez azért van így, mert λ skalár, így „kommutál” a mátrix tagokkal. Ugyanakkor, ha λ helyett $\widehat{\mathbf{A}}$ n-ed rendű mátrixot vesszük, akkor az általában már nem kommutál az $\widehat{\mathbf{F}}_j$ mátrixkoefficiensekkel.

Definició:

$$\widehat{\mathbf{F}}\left(\widehat{\mathbf{A}}\right)=\widehat{\mathbf{F}}_m\widehat{\mathbf{A}}^m+\widehat{\mathbf{F}}_{m-1}\widehat{\mathbf{A}}^{m-1}+\ldots+\widehat{\mathbf{F}}\text{-t } \textit{jobb oldali} \text{ értéknek, míg} \tag{B.42}$$

$$\widehat{\widehat{\mathbf{F}}}\left(\widehat{\mathbf{A}}\right)=\widehat{\mathbf{A}}^m\widehat{\mathbf{F}}+\widehat{\mathbf{A}}^{m-1}\widehat{\mathbf{F}}_{m-1}+\ldots+\widehat{\mathbf{F}}\text{-t } \textit{bal oldali} \text{ értéknek} \tag{B.43}$$

fogjuk nevezni, $\lambda\to\widehat{\mathbf{A}}$ behelyettesítésre nézve[20]. Osszuk el $\widehat{\mathbf{F}}(\lambda)$-t $\lambda\widehat{\mathbf{E}}_n-\widehat{\mathbf{A}}$-val! Ekkor a jobb $(\widehat{\mathbf{R}}(\lambda))$ (és bal) oldali maradékok nem függnek λ-tól. Ennek belátásához írjuk fel a sort:

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathbf{F}}(\lambda)&=\widehat{\mathbf{F}}_m\lambda^m+\widehat{\mathbf{F}}_{m-1}\lambda^{m-1}+\ldots+\widehat{\mathbf{F}}_0=\\
&=\widehat{\mathbf{F}}_m\lambda^{m-1}\left(\lambda\widehat{\mathbf{E}}_n-\widehat{\mathbf{A}}\right)+\left(\widehat{\mathbf{F}}_m\widehat{\mathbf{A}}+\widehat{\mathbf{F}}_{m-1}\right)\lambda^{m-1}+\widehat{\mathbf{F}}_{m-2}\lambda^{m-2}+\ldots=\\
&=\left(\widehat{\mathbf{F}}_m\lambda^{m-1}+\left(\widehat{\mathbf{F}}_m\widehat{\mathbf{A}}+\widehat{\mathbf{F}}_1\right)\lambda^{m-2}\right)\left(\lambda\widehat{\mathbf{E}}_n-\widehat{\mathbf{A}}\right)+\left(\widehat{\mathbf{F}}_m\widehat{\mathbf{A}}^2+\widehat{\mathbf{F}}_{m-1}\widehat{\mathbf{A}}+\widehat{\mathbf{F}}_{m-2}\right)\lambda^{m-2}+\widehat{\mathbf{F}}_{m-3}\lambda^{m-3}+\ldots=\\
&=\left(\widehat{\mathbf{F}}_m\lambda^{m-1}+\left(\widehat{\mathbf{F}}_m\widehat{\mathbf{A}}+\widehat{\mathbf{F}}_{m-1}\right)\lambda^{m-2}+\ldots+\widehat{\mathbf{F}}_m\widehat{\mathbf{A}}^{m-1}+\widehat{\mathbf{F}}_{m-1}\widehat{\mathbf{A}}^{m-2}+\ldots\widehat{\mathbf{F}}_{m-1}\right)\cdot\\
&\quad\cdot\left(\lambda\widehat{\mathbf{E}}_n-\widehat{\mathbf{A}}\right)+\widehat{\mathbf{F}}_m\widehat{\mathbf{A}}^m+\widehat{\mathbf{F}}_{m-1}\widehat{\mathbf{A}}^{m-1}+\ldots+\widehat{\mathbf{F}}_0.
\end{aligned} \tag{B.44}$$

Ezzel beláttuk, hogy

$$\widehat{\mathbf{R}}=\widehat{\mathbf{F}}_m\widehat{\mathbf{A}}^m+\widehat{\mathbf{F}}_{m-1}\widehat{\mathbf{A}}^{m-1}+\ldots+\widehat{\mathbf{F}}_0=\widehat{\mathbf{F}}\left(\widehat{\mathbf{A}}\right). \tag{B.45}$$

Analóg módón lehet mindezt megmutatni a bal oldali maradékra is. Ezzel bebizonyítottuk Bez általános tételét. Ebből a tételből következik, hogy akkor és csak akkor lesz maradékmentes a fenti „osztás”, ha $\widehat{\mathbf{F}}\left(\widehat{\mathbf{A}}\right)=\widehat{\mathbf{0}}$.

B.2.4. Mátrix karakterisztikus polinomja, asszociált mátrix

Az $\widehat{\mathbf{A}}$ kvadratikus mátrix *karakterisztikus mátrix*ának nevezzük a $\lambda\widehat{\mathbf{E}}_n-\widehat{\mathbf{A}}$ mátrixot. Az ehhez tartozó karakterisztikus polinom pedig:

$$p(\lambda):=\det\left(\lambda\widehat{\mathbf{E}}_n-\widehat{\mathbf{A}}\right)$$

$\widehat{\mathbf{B}}=\operatorname{adj}\left(\lambda\widehat{\mathbf{E}}_n-\widehat{\mathbf{A}}\right)$ mátrixot (l. B.1.6) (35. oldal) $\widehat{\mathbf{A}}$ mátrixhoz *asszociált mátrix*nak fogjuk nevezni.

A mátrix adjungáltájra kimondott tételből (l. 6. tétel a 35. oldalon) következik, hogy

$$\left(\lambda\widehat{\mathbf{E}}_n-\widehat{\mathbf{A}}\right)\widehat{\mathbf{B}}(\lambda)=p(\lambda)\widehat{\mathbf{E}}_n \tag{B.46a}$$

$$\widehat{\mathbf{B}}(\lambda)\left(\lambda\widehat{\mathbf{E}}_n-\widehat{\mathbf{A}}\right)=p(\lambda)\widehat{\mathbf{E}}_n \tag{B.46b}$$

Ezeknek az egyenleteknek a jobb oldalát tekinthetjük mátrix-együtthatós egyenletnek is (itt mindenhova beírhatjuk $\widehat{\mathbf{E}}_n$-t, illetve annak hatványait. $\widehat{\mathbf{B}}(\lambda)$ is felbontható mátrix-polinom alakban. Ekkor a (B.46) egyenletekből látszik, hogy $p(\lambda)\widehat{\mathbf{E}}_n$ balról is és jobbról is osztható maradék nélkül $\left(\lambda\widehat{\mathbf{E}}_n-\widehat{\mathbf{A}}\right)$-val. Ez Bez általános tétele szerint csak akkor lehetséges, ha $p\left(\widehat{\mathbf{A}}\right)\widehat{\mathbf{E}}_n=p\left(\widehat{\mathbf{A}}\right)$ maradék nullával egyenlő. Ezzel kimondtuk

8. Tétel. *(Hamilton–Cayley)*
Minden kvadratikus mátrix kielégíti a saját karakterisztikus egyenletét[21]*, azaz*

$$p\left(\widehat{\mathbf{A}}\right)=\widehat{\mathbf{0}} \tag{B.47}$$

Például:

$$\widehat{\mathbf{A}}=\begin{pmatrix}2&1\\-1&3\end{pmatrix},$$

$$p(\lambda)=\det\begin{pmatrix}\lambda-2&-1\\1&\lambda-3\end{pmatrix}=\lambda^2-5\lambda+7,$$

$$p\left(\widehat{\mathbf{A}}\right)=\widehat{\mathbf{A}}^2-5\widehat{\mathbf{A}}+7\widehat{\mathbf{E}}_n=\begin{pmatrix}3&5\\-5&8\end{pmatrix}-5\begin{pmatrix}2&1\\-1&3\end{pmatrix}+7\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=\widehat{\mathbf{0}}.$$

[20] jobb oldali értéknél $\widehat{\mathbf{A}}^m$ mátrixok $\widehat{\mathbf{F}}$ együtthatóktól *jobbra* állnak.

[21] Ez is hasonló bizonyítás, mint 39. oldalon, csak egy általánosabb elmélet keretein belül.

Mátrixfüggvény sajátértékei

$p(\lambda)$-t felírhatjuk gyöktényezős alakban (miután megkerestük a $p(\lambda) = 0$ egyenlet össze gyökét. Azaz:

$$p(\lambda) = \det\left(\lambda\widehat{\mathbf{E}}_n - \widehat{\mathbf{A}}\right) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - l_2)\cdots(\lambda - \lambda_n) \tag{B.48}$$

Itt természetesen előforulhatnak többszörös (elfajult) gyökök is.

Legyen $g(\mu)$ (skalár)polinom. Keressük meg $g\left(\widehat{\mathbf{A}}\right)$ mátrix-polinom karakterisztikus egyenletének gyökeit! Ehhez írjuk fel g-t is gyöktényezős alakban:

$$g(\mu) = a_0(\mu - \mu_1)(\mu - \mu_2)\cdots(\mu - \mu_l), \tag{B.49}$$

itt $a_0 \in \mathbb{K}$. Helyettesítsük be $\widehat{\mathbf{A}}$-t μ helyére:

$$g\left(\widehat{\mathbf{A}}\right) = a_0\left(\widehat{\mathbf{A}} - \mu_1\widehat{\mathbf{E}}_n\right)\left(\widehat{\mathbf{A}} - \mu_2\widehat{\mathbf{E}}_n\right)\cdots\left(\widehat{\mathbf{A}} - \mu_l\widehat{\mathbf{E}}_n\right). \tag{B.50}$$

Végezzük el a következő azonos átalakításokat az előző egyenleten, felhasználva (B.49) és (B.48) egyenleteket:

$$\begin{aligned}
\det\left(g\left(\widehat{\mathbf{A}}\right)\right) &= a_0^l \det\left(\widehat{\mathbf{A}} - \mu_1\widehat{\mathbf{E}}_n\right)\det\left(\widehat{\mathbf{A}} - \mu_2\widehat{\mathbf{E}}_n\right)\cdots\det\left(\widehat{\mathbf{A}} - \mu_l\widehat{\mathbf{E}}_n\right) = \\
&= (-1)^{n\cdot l} a_0^l p(\mu_1)p(\mu_2)\cdots p(\mu_l) = \\
&= (-1)^{nl} a_0^l \prod_{i=1}^{l}\prod_{k=1}^{n}(\mu_i - \lambda_k) = g(\lambda_1)g(\lambda_2)\cdots g(\lambda_n).
\end{aligned}$$

Amennyiben $\lambda - g(\mu)$-t írjuk át[22], akkor azt kapjuk, hogy

$$\det\left(\lambda\widehat{\mathbf{E}}_n - g\left(\widehat{\mathbf{A}}\right)\right) = (\lambda - g(\lambda_1))(\lambda - g(\lambda_2))\cdots(\lambda - g(\lambda_n)) \tag{B.51}$$

Azaz

9. Tétel. *Ha $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ $\widehat{\mathbf{A}}$ sajátértékei (azaz karakterisztikus polinomjának gyökei), és g tetszőleges skalár polinom, akkor $g(\lambda_1), g(\lambda_2), \ldots, g(\lambda_n)$ mind sajátértékei $g\left(\widehat{\mathbf{A}}\right)$ mátrix polinomnak. Speciálisan a mátrix hatványok sajátértékei a sajátértékek hatványai.*

$\widehat{\mathbf{B}}(\lambda)$ kifejezése $p(\lambda)$ segítségével

Legyen $p(\lambda) = \lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + p_2\lambda^{n-2} + \cdots + p_n$. Ekkor $p(\lambda) - p(\mu)$ különbség maradék nélkül osztható $\lambda - \mu$-vel. Vezessük be

$$\delta(\lambda, \mu) = \frac{p(\lambda) - p(\mu)}{\lambda - \mu} = \lambda^{n-1} + (\mu + p_1)\lambda^{n-2} + \left(\mu^2 + p_1\mu + p_2\right)\lambda^{n-3} + \ldots \tag{B.52}$$

Ezzel egyenértékű: $p(\lambda) - p(\mu) = \delta(\lambda, \mu)(\lambda - \mu)$. Ez a kifejezés érvényes marad, ha a számok helyett egymással kommutáló mátrixokat írunk be. Helyettesítsük be λ és μ helyére rendre $\lambda\widehat{\mathbf{E}}_n$ és $\widehat{\mathbf{A}}$ mátrixokat! Ekkor felhasználva Hamilton-Cayley tételt (hogy tudniillik $p\left(\widehat{\mathbf{A}}\right) = \mathbf{0}$) találjuk, hogy

$$p(\lambda)\widehat{\mathbf{E}}_n = \delta\left(\lambda\widehat{\mathbf{E}}_n, \widehat{\mathbf{A}}\right)\left(\lambda\widehat{\mathbf{E}}_n - \widehat{\mathbf{A}}\right) \tag{B.53}$$

(B.53) és (B.46) egyenletek összevetéséből látszik, hogy

$$\widehat{\mathbf{B}}(\lambda) = \delta\left(\lambda\widehat{\mathbf{E}}_n, \widehat{\mathbf{A}}\right) \tag{B.54}$$

Mivel $\widehat{\mathbf{B}}$ adjungáltságából következően $n-1$-ed fokú mátrix, polinom-tagjait könnyen felírhatjuk (B.52) alapján:

$$\widehat{\mathbf{B}}(\lambda) = \lambda^{n-1}\widehat{\mathbf{E}}_n + \lambda^{n-2}\widehat{\mathbf{B}}_1 + \lambda^{n-3}\widehat{\mathbf{B}}_2 + \cdots + \widehat{\mathbf{B}}_{n-1}, \text{ ahol} \tag{B.55}$$

$$\widehat{\mathbf{B}}_1 = \widehat{\mathbf{A}} + p_1\widehat{\mathbf{E}}_n, \quad \widehat{\mathbf{B}}_2 = \widehat{\mathbf{A}}^2 + p_1\widehat{\mathbf{A}} + p_2\widehat{\mathbf{E}}_n, \ldots, \text{ általában pedig} \tag{B.56}$$

$$\widehat{\mathbf{B}}_k = \widehat{\mathbf{A}}^k + p_1\widehat{\mathbf{A}}^{k-1} + p_2\widehat{\mathbf{A}}^{k-2} + p_3\widehat{\mathbf{A}}^{k-3} + \cdots + p_k\widehat{\mathbf{E}}_n \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1). \tag{B.57}$$

[22] λ tetszőleges paraméter.

$\widehat{\mathbf{B}}_k$ mátrixokat rekurziós képlet alapján is kiszámolhatjuk, ugyanis

$$\widehat{\mathbf{B}}_k = \widehat{\mathbf{A}}\widehat{\mathbf{B}}_{k-1} + p_k\widehat{\mathbf{E}}_n \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1; \widehat{\mathbf{B}}_0 = \widehat{\mathbf{E}}_n). \tag{B.58}$$

írjuk fel a rekurziós képletet az „utolsó utáni” tagra:

$$\widehat{\mathbf{A}}\widehat{\mathbf{B}}_{n-1} + p_n\widehat{\mathbf{E}}_n = \widehat{\mathbf{0}} \tag{B.59}$$

Fenti egyenlet egszerűen igazolható, hiszen $\widehat{\mathbf{B}}_{n-1}$-et kiírva (B.58) szerint ismét $p\left(\widehat{\mathbf{A}}\right) = 0$ egyenletet kapjuk.

Amennyiben $\det\widehat{\mathbf{A}} \neq 0$, akkor az előző egyenlőséget beszorozhatjuk balról $\widehat{\mathbf{A}}^{-1}$-el, és máris megkaptuk az inverz mátrixot[23]:

$$\widehat{\mathbf{A}}^{-1} = -\frac{1}{p_n}\widehat{\mathbf{B}}_{n-1} \tag{B.60}$$

Legyen λ_0 $\widehat{\mathbf{A}}$ sajátértéke, azaz $p(\lambda_0) = 0$. Ekkor a (B.46) egyenletbe behelyettesítve:

$$\left(\lambda_0\widehat{\mathbf{E}}_n - \widehat{\mathbf{A}}\right)\widehat{\mathbf{B}}(\lambda_0) = \widehat{\mathbf{0}} \tag{B.61}$$

Tegyük fel, hogy $\widehat{\mathbf{B}}(\lambda_0) \neq \widehat{\mathbf{0}}$ és vegyük ennek a mátrixnak egy tetszőleges nem nulla oszlopát ($\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$). Ekkor az előző egyenlőségből következően $\left(\lambda_0\widehat{\mathbf{E}}_n - \widehat{\mathbf{A}}\right)\mathbf{b} = \mathbf{0}$, vagy ami ezzel egyenértékű:

$$\widehat{\mathbf{A}}\mathbf{b} = \lambda_0\mathbf{b}. \tag{B.62}$$

Ennek megfelelően leolvashatjuk a mátrix különböző sajátértékeihez tartozó sajátvektorait.

Példa.

$$\widehat{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$p(\lambda) = \det\left(\lambda\widehat{\mathbf{E}}_n - \widehat{\mathbf{A}}\right) = \det\begin{pmatrix} \lambda-2 & 1 & -1 \\ 0 & \lambda-1 & -1 \\ 1 & -1 & \lambda-1 \end{pmatrix} = \lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2,$$

$$\delta(\lambda,\mu) = \frac{p(\lambda) - p(\mu)}{\lambda - \mu} = \lambda^2 + \lambda(\mu - 4) + \mu^2 - 4\mu + 5,$$

$$\widehat{\mathbf{B}}(\lambda) = \delta\left(\lambda\widehat{\mathbf{E}}_n, \widehat{\mathbf{A}}\right) = \lambda^2\widehat{\mathbf{E}}_n + \lambda\underbrace{\left(\widehat{\mathbf{A}} - 4\widehat{\mathbf{E}}_n\right)}_{\widehat{\mathbf{B}}_1} + \underbrace{\widehat{\mathbf{A}}^2 - 4\widehat{\mathbf{A}} + 5\widehat{\mathbf{E}}_n}_{\widehat{\mathbf{B}}_2}.$$

Végezzük el a számolásokat

$$\widehat{\mathbf{B}}_1 = \widehat{\mathbf{A}} - 4\widehat{\mathbf{E}}_n = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \widehat{\mathbf{A}}\widehat{\mathbf{B}}_1 + 5\widehat{\mathbf{E}}_n = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\widehat{\mathbf{B}}(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda^2 - 2\lambda & -\lambda + 2 & \lambda - 2 \\ -1 & \lambda^2 - 3\lambda + 3 & \lambda - 2 \\ -\lambda + 1 & \lambda - 1 & \lambda^2 - 3\lambda + 2 \end{pmatrix},$$

$$\det\widehat{\mathbf{A}} = 2, \quad \widehat{\mathbf{A}}^{-1} = \frac{1}{2}\widehat{\mathbf{B}}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix},$$

továbbá

$$p(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2).$$

A két sajátértékhez tartozó sajátvektorok: $\widehat{\mathbf{B}}(+1)$ első oszlopa: $(-1, -1, 0)$, $\widehat{\mathbf{B}}(-2)$ első oszlopa: $(0, -1, -1)$.

[23] $p_n = (-1)^n \det\widehat{\mathbf{A}}$

B.2.5. Mátrixinvertálás Fagyeev módra

Kis kitérőként álljon itt a hagyományos két (kifejtési tétel és Gauss elimináció) mátrixinvertálási módszer mellett egy harmadik, ami a Newton módszer Fagyeev által módosított változata. Ráadásul egyszerre kapjuk meg a karakterisztikus polinomot ($p(\lambda) = \lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + \cdots + p_n$), az asszociált mátrixot ($\widehat{\mathbf{B}}$) és annak polinom együtthatóit ($\widehat{\mathbf{B}}_i$) és az inverzet ($\widehat{\mathbf{A}}^{-1}$) is.

A levezetéshez szükségünk lesz a spúr (trace) fogalmára.

Definicio: $\widehat{\mathbf{A}}$ kvadratikus mátrix spúrján az átlós elemek összegét értjük. Jelölésben: $\operatorname{Sp}\widehat{\mathbf{A}} = \sum_{i=1}^n a_{ii}$. Könnyű belátni, hogy

$$\operatorname{Sp}\widehat{\mathbf{A}} = p_1 = \sum_{i=1}^n \lambda_i, \tag{B.63}$$

ahol $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ $\widehat{\mathbf{A}}$ mátrix sajátértékei. Mivel a mátrix hatványainak sajátértékei a sajátértékek hatványai (9. tétel, 43. oldal), így triviálisan

$$\operatorname{Sp}\left(\widehat{\mathbf{A}}^k\right) := s_k = \sum_{i=1}^n \lambda_i^k \tag{B.64}$$

A most definiált s_k összegek és a p_k együtthatók között igazolható az alábbi összefüggés:

$$kp_k = s_k + p_1 s_{k-1} + \cdots + p_{k-1}s_1, \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{B.65}$$

Ezt nevezzük Newton-formulának és bizonyítása megtalálható például [15] 224. oldalán.

Fagyeejev módszere szerint az alábbi rekurziós formulákkal számíthatjuk ki a minket érdeklő mennyiségeket:

$$\begin{array}{ccc}
\widehat{\mathbf{A}}_1 = \widehat{\mathbf{A}} & p_1 = -\operatorname{Sp}\widehat{\mathbf{A}}_1 & \widehat{\mathbf{B}}_1 = A_1 + p_1\widehat{\mathbf{E}}_n \\
\widehat{\mathbf{A}}_2 = \widehat{\mathbf{A}}\widehat{\mathbf{B}}_1 & p_2 = -\frac{1}{2}\operatorname{Sp}\widehat{\mathbf{A}}_2 & \widehat{\mathbf{B}}_2 = A_2 + p_2\widehat{\mathbf{E}}_n \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
\widehat{\mathbf{A}}_{n-1} = \widehat{\mathbf{A}}\widehat{\mathbf{B}}_{n-2} & p_{n-1} = -\frac{1}{n-1}\operatorname{Sp}\widehat{\mathbf{A}}_{n-1} & \widehat{\mathbf{B}}_{n-1} = \widehat{\mathbf{A}}_{n-1} + p_{n-1}\widehat{\mathbf{E}}_n \\
\widehat{\mathbf{A}}_n = \widehat{\mathbf{A}}\widehat{\mathbf{B}}_{n-1} & p_n = -\frac{1}{n}\operatorname{Sp}\widehat{\mathbf{A}}_n & \widehat{\mathbf{B}}_n = \widehat{\mathbf{A}}_n + p_n\widehat{\mathbf{E}}_n = \widehat{\mathbf{0}}
\end{array}$$

Az utolsó egyenletet ($\widehat{\mathbf{B}}_n = \widehat{\mathbf{A}}_n + p_n\widehat{\mathbf{E}}_n = \widehat{\mathbf{0}}$) használhatjuk a számolás helyességének ellenőrzésére.

Annak érdekében, hogy belássuk, hogy a fenti formulák valóban az eddig már más úton kiszámolt p_i és $\widehat{\mathbf{B}}_i$ együtthatókat adják vissza, számoljuk ki egy tetszőleges tagját ($k = 1, 2, \ldots, n$) a sorozatnak, behelyettesítve az összes előzőt:

$$\widehat{\mathbf{A}}_k = \widehat{\mathbf{A}}^k + p_1\widehat{\mathbf{A}}^{k-1} + \cdots + p_{k-1}\widehat{\mathbf{A}} \tag{B.66}$$

$$\widehat{\mathbf{B}}_k = A^k + p_1\widehat{\mathbf{A}}^{k-1} + \cdots + p_{k-1}\widehat{\mathbf{A}} + p_k\widehat{\mathbf{E}}_n \tag{B.67}$$

Vegyük (B.66) egyenlet spúrját. Ekkor kapjuk

$$kp_k = s_k + p_1 s_{k-1} + \cdots + p_{k-1}s_1 \tag{B.68}$$

Ez viszont pont a Newton-formula (B.65), azaz p_i együtthatók valóban a karakterisztikus polinom megfelelő együtthatói. Ekkor azonban (B.67) megegyezik (B.57) definiáló egyenlettel, ezért valóban B_i együtthatómátrixokat kapjuk.

Példa.

$$\widehat{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad p_1 = -\operatorname{Sp}\widehat{\mathbf{A}} = -4, \quad \widehat{\mathbf{B}}_1 = \widehat{\mathbf{A}} - 4\widehat{\mathbf{E}}_n = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\widehat{\mathbf{A}}_2 = \widehat{\mathbf{A}}\widehat{\mathbf{B}}_1 = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 0 & -3 \\ -1 & -2 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & -5 \\ -3 & -3 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad p_2 = -\frac{1}{2}\operatorname{Sp}\widehat{\mathbf{A}}_2 = 2, \quad \widehat{\mathbf{B}}_2 = \widehat{\mathbf{A}}_2 + 2\widehat{\mathbf{E}}_n = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 & -3 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & -5 \\ -3 & -3 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\widehat{\mathbf{A}}_3=\widehat{\mathbf{A}}\widehat{\mathbf{B}}_2=\begin{pmatrix}-5&2&0&-2\\1&0&-2&-4\\-1&-7&-3&4\\0&4&-2&-7\end{pmatrix},\quad p_3=-\frac{1}{3}\operatorname{Sp}\widehat{\mathbf{A}}_3=5,\quad \widehat{\mathbf{B}}_3=\widehat{\mathbf{A}}_3+5\widehat{\mathbf{E}}_n=\begin{pmatrix}0&2&0&-2\\1&5&-2&4\\-1&-7&2&4\\0&4&-2&-2\end{pmatrix}$$

$$\widehat{\mathbf{A}}_4=\widehat{\mathbf{A}}\widehat{\mathbf{B}}_3=\begin{pmatrix}-2&0&0&0\\0&-2&0&0\\0&0&-2&0\\0&0&0&-2\end{pmatrix},\quad p_4=2,$$

$$p(\lambda)=\lambda^4-4\lambda^3+2\lambda^2+5\lambda+2,$$

$$\det\widehat{\mathbf{A}}=2, \widehat{\mathbf{A}}^{-1}=-\frac{1}{p_4}\widehat{\mathbf{B}}_3=\begin{pmatrix}0&-1&0&1\\-\frac{1}{2}&-\frac{5}{2}&1&-2\\\frac{1}{2}&\frac{7}{2}&-1&-2\\0&-2&1&1\end{pmatrix}$$

B.2.6. Minimális polinom

Definíciók: $f(\lambda)$ polinomot $\widehat{\mathbf{A}}$ kvadratikus mátrix *eltűnő polinom*jának nevezzük, ha

$$f\left(\widehat{\mathbf{A}}\right)=\widehat{\mathbf{0}}.$$

$\phi(\lambda)$ eltűnő polinomot, melynek foka a legkisebb és a polinom vezető tagjának együtthatója egy, $\widehat{\mathbf{A}}$ *minimális* polinomjának nevezzük.

A Hamilton-Cayley tételből következik, hogy a $p(\lambda)$ karakterisztikus polinom eltűnő az $\widehat{\mathbf{A}}$ mátrixra nézve. A továbbikaban azonban látni fogjuk, hogy általában nem minimális.
„Osszuk el" $f(\lambda)$ eltűnő polinomot a minimális polinommal:

$$f(\lambda)=\phi(\lambda)\,q(\lambda)+r(\lambda),$$

ahol $r(\lambda)$ foka kisebb, mint $\phi(\lambda)$ foka. Ebből következik, hogy

$$f\left(\widehat{\mathbf{A}}\right)=\phi\left(\widehat{\mathbf{A}}\right)q\left(\widehat{\mathbf{A}}\right)+r\left(\widehat{\mathbf{A}}\right)$$

Amennyiben $f\left(\widehat{\mathbf{A}}\right)=\widehat{\mathbf{0}}$ és $\phi\left(\widehat{\mathbf{A}}\right)=\widehat{\mathbf{0}}$, úgy $r\left(\widehat{\mathbf{A}}\right)=\widehat{\mathbf{0}}$. De $r(\lambda)$ foka kisebb, mint a minimális polinom $(\phi(\lambda))$ foka. Ebből következik, hogy $r(\lambda)=0$.[24] Ezek szerint *a mátrix tetszőleges eltűnő polinomja maradék nélkül osztható a minimális polinommal.*

Tegyük fel, hogy egy mátrixhoz találtunk két minimális polinomot: $\phi(\lambda)$ és $\phi'(\lambda)$. Ekkor mindkettő maradék nélkül ösztható a másikkal, vagyis a két polinom csak egy szorzófaktorban térhet el egymástól[25]. Viszont ez a szorzó csak az egy lehet, mivel definició szerint a vezető rend tagjainak együtthatója egy kell, hogy legyen. Ezek szerint $\widehat{\mathbf{A}}$ minimális polinomja *egyértelmű.*

Határozzuk meg a minimális polinom és a karakterisztikus polinom kapcsolatát! Vegyük ismét $\widehat{\mathbf{A}}$ mátrixot és a hozzá asszociált $\widehat{\mathbf{B}}(\lambda)$-t (lásd 42 oldal). Legyen $d_{n-1}(\lambda)$ $\widehat{\mathbf{B}}(\lambda)$ legnagyobb közös osztója[26], ekkor

$$\widehat{\mathbf{B}}(\lambda)=d_{n-1}(\lambda)\,\widehat{\mathbf{C}}(\lambda),\tag{B.69}$$

ahol $\widehat{\mathbf{C}}(\lambda)$ valamilyen polinom mátrix, melyet $\widehat{\mathbf{B}}(\lambda)$ „redukált" mátrixának nevezünk. Ezt a kiemelést behelyettesítve (B.10) (35. oldal) egyenletbe:

$$p(\lambda)\,\widehat{\mathbf{E}}_n=d_{n-1}(\lambda)\left(\lambda\widehat{\mathbf{E}}_n-\widehat{\mathbf{A}}\right)\widehat{\mathbf{C}}(\lambda)\tag{B.70}$$

Ebből következik, hogy a karakterisztikus polinom maradék nélkül osztható $d_{n-1}(\lambda)$-el.

$$\psi(\lambda)=\frac{p(\lambda)}{d_{n-1}(\lambda)}\tag{B.71}$$

Ahol $\psi(\lambda)$ valamilyen polinom. A (B.70) egyenletet egyszerűsíthetjük $d_{n-1}(\lambda)$-el, ekkor kapjuk:

$$\psi(\lambda)\,\widehat{\mathbf{E}}_n=\left(\lambda\widehat{\mathbf{E}}_n-\widehat{\mathbf{A}}\right)\widehat{\mathbf{C}}(\lambda)\tag{B.72}$$

[24] Ellenkező esetben létezne olyan eltűnő polinom, aminek kisebb lenne a foka, mint a minimális polinomnak.
[25] Mivel mindkettő azonos rendű, különben valamelyik nem lenne minimális polinom.
[26] azaz ezt $\widehat{\mathbf{B}}$ minden eleméből ki lehet emelni

Mivel $\psi(\lambda)\,\widehat{\mathbf{E}}_n$ balról maradék nélkül osztható $\left(\lambda\widehat{\mathbf{E}}_n-\widehat{\mathbf{A}}\right)$-val Bez tétele szerint (42. oldal):

$$\psi\left(\widehat{\mathbf{A}}\right)=\widehat{\mathbf{0}} \tag{B.73}$$

Ezek szerint a (B.71) által definiált $\psi(\lambda)$ eltűnő polinomja $\widehat{\mathbf{A}}$-nak. Megmutatjuk, hogy minimális polonom is.

Jelöljük $\widehat{\mathbf{A}}$ minimális polinomját $\psi'(\lambda)$-vel. Ekkor $\psi(\lambda)$ maradék nélkül osztható $\psi'(\lambda)$-el:

$$\psi(\lambda)=\psi'(\lambda)\,\xi(\lambda) \tag{B.74}$$

Miután $\psi'\left(\widehat{\mathbf{A}}\right)=\widehat{\mathbf{0}}$, így Bez tétele szerint $\psi'(\lambda)$ balról maradék nélkül osztható $\left(\lambda\widehat{\mathbf{E}}_n-\widehat{\mathbf{A}}\right)$-val:

$$\psi'(\lambda)\,\widehat{\mathbf{E}}_n=\left(\lambda\widehat{\mathbf{E}}_n-\widehat{\mathbf{A}}\right)\widehat{\mathbf{C}}'(\lambda) \tag{B.75}$$

Ekkor (B.74) és (B.75) egyenletekből:

$$\psi(\lambda)\,\widehat{\mathbf{E}}_n=\xi(\lambda)\left(\lambda\widehat{\mathbf{E}}_n-\widehat{\mathbf{A}}\right)\widehat{\mathbf{C}}'(\lambda) \tag{B.76}$$

Az osztás egyértelműségét kihasználva (B.72) és (B.76) egyenletekből következik, hogy

$$\widehat{\mathbf{C}}(\lambda)=\xi(\lambda)\,\widehat{\mathbf{C}}'(\lambda) \tag{B.77}$$

Ebből viszont következik, hogy $\xi(\lambda)$ $\widehat{\mathbf{C}}(\lambda)$ minden elemének osztója. Másrészt viszont $\widehat{\mathbf{C}}(\lambda)$ elemeinek legnagyobb közös osztója 1, hiszen ezt a mátrixot $\widehat{\mathbf{B}}(\lambda)$ ből pont a közös osztók leválasztásával redukáltuk. Ezek szerint $\xi(\lambda)$ konstansfüggvény, és mivel a vezető tagok együtthatója egy, ezért $\xi(\lambda)=1$, azaz $\psi(\lambda)=\psi'(\lambda)$. Pont ezt kellett megmutatnunk. Ezek szerint sikerült kifejezni a minimális polinomot a

$$\psi(\lambda)=\frac{p(\lambda)}{d_{n-1}(\lambda)} \tag{B.78}$$

egyenlettel. Ezek után $\widehat{\mathbf{C}}(\lambda)$ meghatározásához (B.54) (43. o.) alakú egyenlet áll rendelkezésünkre:

$$\widehat{\mathbf{C}}(\lambda)=\Psi\left(\lambda\widehat{\mathbf{E}}_n,\widehat{\mathbf{A}}\right), \tag{B.79a}$$

ahol

$$\Psi(\lambda,\mu)=\frac{\psi(\lambda)-\psi(\mu)}{\lambda-\mu}. \tag{B.79b}$$

Ezen kívül véve a $\left(\lambda\widehat{\mathbf{E}}_n-\widehat{\mathbf{A}}\right)\widehat{\mathbf{C}}=\psi(\lambda)\,\widehat{\mathbf{E}}_n$ egyenlet determinánsát, kapjuk:

$$p(\lambda)\det\widehat{\mathbf{C}}(\lambda)=(\psi(\lambda))^n \tag{B.80}$$

Ezek szerint egyrészt $p(\lambda)$ maradék nélkül osztható $\psi(\lambda)$-val, másrészt $\psi(\lambda)$ adott hatványa maradék nélkül osztható $p(\lambda)$-val. Ebből következik, hogy $p(\lambda)$ és $\Psi(\lambda)$ különböző értékű gyökeinek halmaza azonos. Azaz ha

$$p(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{m_1}(\lambda-\lambda_2)^{m_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{m_s},\quad(\lambda_i\neq\lambda_j,i\neq j,m_i>0) \tag{B.81}$$

akkor

$$\Psi(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{l_1}(\lambda-\lambda_2)^{l_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{l_s}, \tag{B.82}$$

ahol

$$0<l_k\leq m_k\quad(k=1,2,\ldots,s) \tag{B.83}$$

A legtöbb („normális”) mátrixnál a minimális polinom minden gyököt egyszeresen tartalmaz. Azonban ez nincs mindig így. Például:

$$\widehat{\mathbf{A}}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\quad p(\lambda)=\lambda^2,\quad\widehat{\mathbf{A}}^2=\widehat{\mathbf{0}}\text{ de }\widehat{\mathbf{A}}\neq\widehat{\mathbf{0}} \tag{B.84}$$

C. Függelék

Operátor-algebra

C.1. Folytonos függvények konvolúciójának fogalma és tulajdonságai

Definició: két függvény $(a(t), b(t))$ konvoluciójának nevezzük a

$$c(t) = \int_0^t a(t-\tau)b(\tau)d\tau \tag{C.1}$$

integrál függvényt. Röviden jelölhetjük így is: $c = ab$

A konvolúció tulajdonságai[1]

- kommutatív $(ab = ba)$
- asszociatív $((ab)c = a(bc))$

Ennek megfelelően az operátorszámítás alapja az összeadás (=a függvények pontonkénti összege) és a szorzás (=a függvények konvolúciója). Kérdés persze, hogy mindig létezik-e a konvolució, azaz a konvolúciós integrál.

Definició: Azon függvényeket, melyek a $0 \leq t < \infty$ szakaszon vannak értelmezve és folytonosak, a $\mathcal{C}$ osztály függvényeinek hívjuk. Ezen függvények értékei lehetnek valósak vagy komplexek $(a(t) \in \mathbb{K})$. Két $\mathcal{C}$ oztály beli függvény konvolúciója szintén $\mathcal{C}$ beli függvény.

Fontos még *Titcharsh tétele* mely szerint ha két $\mathcal{C}$ osztály beli függvény nem azonosan egyenlő zérussal, akkor a konvoluciójuk sem azonosan nulla. Ezek után az operátort, mint a konvolúció inverzét produkáló „valami" vezeti be:

$$a, b \in \mathcal{C} \Rightarrow c = \frac{a}{b} \tag{C.2}$$

c az az operátor, melyre $a = bc$. Azért nem függvény, mert nem mindig létezik ilyen függvény, viszont Titcharsh tételéből következően ha létezik, akkor egyértelműen létezik a c függvény. Az operátorok tehát a törtek mintájára lettek bevezetve.

Ezek után meghatározható az integrálás és a deriválás operátora, majd sok alkalmazást láthatunk. Egy részükben már az eredmény is operátor, azaz nem fejezhető ki függvényként.

[1] A bizonyítás megtalálható: [9] 9-12. oldal.

Irodalomjegyzék

[1] П.І. Каленюк, З.М. Нитребич, П.Л. Сохан: Операційний метод побудови розв'язку задачи Коши для однорідної системи диференціальних рівняньіз частинними похідними безмежного порядку, Львів – 1995
(Operational method for the solution construction of the Cauchy problem for a homogeneous system of partial differential equations of the infinite order)

[2] З. М. Нитребич: Один метод к построению частных решений дифференциальных уравнений

[3] I. N. Bronstejn, K. A. Szemengyajev: Matematikai zsebkönyv, 6. átdolgozott kiadás, Műszaki, 1987

[4] L. SZ. Pontrjagin: Közönséges differenciálegyenletek, Akadémiai Kiadó, Budapest 1972

[5] П.І. Каленюк, З.М. Нитребич. Схема відокремлення змінних для матричного білінійного функціонального рівняння та її застосування, Укр. мат. журн. 1992, №9

[6] Martin Braun: Differential Equations and Their Applications (Third Edition) Short Version, Springer-Verlag (New York) 1983

[7] Jánossy L. Tasnádi P.: Vektorszámítás (I. kötet, Vektor- és tenzoralgebra), II. kiadás, Tankönyvkiadó, Budapest 1982

[8] З.М. Нитребич: Операційний метод побудови розв'язку задачі Коші для однорідної системи диференціальних риівнянь із частинними похідними, Мат. методи та физ.-мех. поля. – 1995, №38. (С. 40-45.)

[9] Jan Mikusiński: Operátorszámítás (Calcul operationel), Műszaki kiadó, 1961

[10] Ф.Р. Гантмахер: Теория матриц, Гос. Изд. Тех.-Тео. Лит., Москва 1953

[11] В.С. Владимиров: Уравнения математишеской физики, Наука, Москва 1979, С. 392.

[12] Л.И. Сленян: Нестацыонарные упругие волны, Л. Судостроение 1972.

[13] R.A. Eubanks, E.I. Sternberg: On stress functions for elastokinetics and the integration of the repeated wave equation, Quarterly of Applied Math. 1975.**15**,№2, P. 28-35.

[14] Б.А. Бондаренко: Решение задачи Коши для сицтемы дифференциальных уравненуй динамической теории упругости, Изв АХ УзССР., 1975, №1, С.5-9.

[15] А. Г. Курош, Курс высшей алгебры, 3-е изд., Гостехиздат, 1952.

[16] Nagy Károly, Elméleti mechanika, 2. kiadás, Tankönyvkiadó, 1987.