# A csodálatos $e$ legújabb kalandjai

A módszer „lényege”

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x \tag{1}$$

$$x \to \lambda t \Rightarrow \frac{d}{dt}e^{\lambda t} = \lambda e^{\lambda t} \tag{2}$$

$$L(t) = \sum_{i=0}^{n} a_i t^i \Rightarrow L\left(\frac{d}{d\lambda}\right) e^{\lambda t} = L(t) e^{\lambda t} \tag{3}$$

Egy egyszerű matematikai példa

$$\frac{d^2T}{dt^2} - 4T = e^{2t} \tag{4}$$

Itt $L(t) = t^2 - 4$. A (4) egyenlet megoldása két tagból áll.

$$T_0 \text{ olyan, hogy } L\left(\frac{d}{dt}\right) T_0 = 0$$

$T_1$ pedig *egy* partikuláris megoldása (4)-nek

Ekkor $T = T_0 + T_1$ az általános megoldás.

$T_0$ meghatározása $\rightarrow$ szekuláris egyenletből:

$$T_0 := e^{\lambda t}$$

$$\frac{d^2 T_0}{dt^2} - 4T_0 = \left(\lambda^2 - 4\right) e^{\lambda t} \Rightarrow \underbrace{\lambda^2 - 4 = 0}_{\text{szek. egy}}$$

$$\lambda = \pm 2$$

$$T_0 = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t} \tag{A}$$

$T_1$ meghatározása $e$ segítségével[†] :

$$T_1 = \lim_{\lambda=0} e^{2\frac{d}{d\lambda}} \left\{ \frac{e^{\lambda t}}{L(\lambda)} \right\} = \lim_{\lambda=0} e^{2\frac{d}{d\lambda}} \left\{ \frac{e^{\lambda t}}{\lambda^2 - 4} \right\} =$$

$$= \lim_{\lambda=2} \frac{e^{\lambda t}}{\lambda^2 - 4} = \lim_{\lambda=2} \frac{te^{\lambda t}}{2\lambda} =$$

$$= \frac{te^{2t}}{4} \tag{B}$$

Ellenőrzés:

$$\left( \frac{d^2}{d} - 4 \right) \frac{te^{2t}}{4} = \frac{1}{4} \left\{ \frac{d}{dt} \left( e^{2t} + 2te^{2t} \right) - 4te^{2t} \right\} =$$

$$= \frac{1}{4} \left( 2e^{2t} + 2e^{2t} + 4te^{2t} - 4te^{2t} \right) = e^{2t}$$

---

$_0$[†]Plusz trükk: $e^{a \cdot \frac{d}{d\lambda}} f(\lambda) = f(\lambda + a)$

Megoldandó az alábbi állandóegyütthatós inhomogén lineáris egyenlet:

$$L\left(\frac{d}{dt}\right)T(t) = f(t), (T, f : \mathbb{R} \to \mathbb{K} \text{ a.}) \quad (5)$$

**Állítás:** (6) $T$ (5) partikuláris megoldása.

$$T(t) = \lim_{\lambda=0} f\left(\frac{d}{d\lambda}\right)\left\{\frac{e^{\lambda t}}{L(\lambda)}\right\} \quad (6)$$

*Hol itt a „csalás”?*

Egy formális bizonyítás a megoldás helyességére:

$$L\left(\frac{d}{dt}\right)\lim_{\lambda=0} f\left(\frac{d}{d\lambda}\right)\left\{L^{-1}(\lambda)e^{\lambda t}\right\} =$$

$$= \lim_{\lambda=0} f\left(\frac{d}{d\lambda}\right)\left\{L\left(\frac{d}{dt}\right)L^{-1}(\lambda)e^{\lambda t}\right\} =$$

$$= f\left(\frac{d}{d\lambda}\right)\left\{L^{-1}(\lambda)L\left(\frac{d}{dt}\right)e^{\lambda t}\right\}\Big|_{\lambda=0} =$$

$$= f\left(\frac{d}{d\lambda}\right)\left\{L^{-1}(\lambda)\left(L(\lambda)e^{\lambda t}\right)\right\}\Big|_{\lambda=0} =$$

$$= f\left(\frac{d}{d\lambda}\right)\left\{e^{\lambda t}\right\}\Big|_{\lambda=0} = f(t)\left\{e^{\lambda t}\right\}\Big|_{\lambda=0} =$$

$$= f(t) \quad (7)$$

Egy fizikai példa:

**Csillapított oszcillátor kényszerrezgése**

$$\ddot{y} + 2\beta\dot{y} + \omega_0^2 y = f(t) \tag{8a}$$

legyen

$$f(t) = a_0 \sin(\omega t) = a_0 \Im e^{i\omega t} \tag{8b}$$

Ekkor a partikuláris megoldás:

$$y_p(t) = f\left(\frac{d}{d\lambda}\right) \frac{e^{\lambda t}}{L(\lambda)}\bigg|_{\lambda=0} =$$

$$= a_0 \Im e^{i\omega\frac{d}{d\lambda}} \left(\frac{e^{\lambda t}}{\lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2}\right)\bigg|_{\lambda=0} =$$

$$= a_0 \Im \left(\frac{e^{\lambda t}}{\lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2}\right)\bigg|_{\lambda=i\omega} =$$

$$= a_0 \Im \left(\frac{e^{i\omega t}}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\beta\omega}\right) = \cdots =$$

$$= \frac{a_0 \sin\left(\omega t - \operatorname{arctg} \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\beta^2\omega^2}} \tag{9}$$

Ez a megoldás megegyezik a tankönyvekben próbafüggvény módszerrel megtalált megoldással.

## Feltárt területek

- Egyváltozós állandóegyütthatós lineáris differenciálegyenletek partikuláris megoldásai
- Cauchy feladatok
  - Spec. homogén Cauchy feladatok
    * Hővezetési egyenlet
    * Inverz hővezetési egyenlet
    * Hullámegyenlet
    * Lame egyenlet
  - Spec. inhomogén Cauchy feladatok (l. előbb)
- Parciális differenciálegyenlet-rendszerek
- Kapcsolódó területek
  - Deriválási trükkök
  - Mátrixalgebrai alapok
  - Mátrixexponens számolása sajátértékekkel
  - Mátrixinvertálás
  - Operátorszámítás

**TODO: $\infty$**